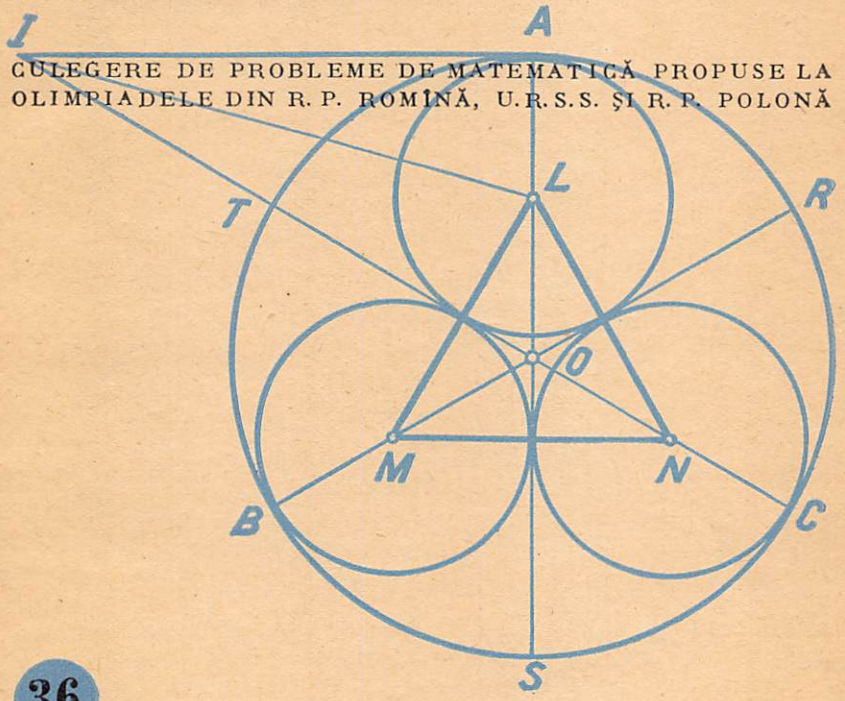
O. SACTER

OLIMPIADE MATEMATICE

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ PROPUSE LA OLIMPIADELE DIN R. P. ROMÎNĂ, U.R.S.S. ŞI R. P. POLONĂ



36

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

EDITURA TINERETULUI 1959

Coperta de :
KOFLER GERARD
Vignete și desene tehnice de :
BUȚU GHEORGHE

CUVÎNT ÎNAINTE

În faza actuală de dezvoltare a științei, cînd sîntem martori ai începutului erei zborurilor interplanetare, eră deschisă prin lansarea primilor sateliți și a planetei artificiale de către savanții și tehnicienii sovietici, știința matematică aduce o contribuție însemnată la desăvîrșirea acestor realizări. Printr-o colaborare rodnică dintre matematică și tehnică s-a putut trece la construcția minunatelor mașini electronice de calcul, atît de necesare pentru progresul științei și tehnicii actuale precum și în mai multe sectoare ale economiei.

În aceste condiții este firesc ca toate organele de conducere din învățămînt și instituții anexe să se preocupe de stimularea studiului matematicii precum și a celorlalte științe ale naturii.

Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R., înțelegînd rolul actual al matematicii și fizicii, organizează an de an olimpiade de matematică și fizică pentru tineretul din școlile de cultură generală și din învățămîntul superior.

Participarea la aceste olimpiade este masivă. Astfel, în anul 1958 au participat la toate formele de întrecere un număr de peste 40 000 elevi, copii ai oamenilor muncii, dintre care mulți au obținut succese însemnate. Precum se vede, interesul elevilor pentru matematici este destul de mare, dacă facem o comparație cu vechile concursuri din timpul regimului burghezo-moșieresc, cînd participau abia cîteva zeci de elevi.

Față de acest interes, care este mereu în creștere, am găsit că este necesar să se dea tineretului din școli o lucrare care să strîngă laolaltă problemele date la aceste olimpiade și unele probleme propuse la olimpiadele similare din marea Uniune Sovietică și din Republica Populară Polonă. Cred că pun astfel

la dispoziția tineretului o lucrare necesară, din care, atît cei care participă la olimpiade, cît și ceilalți elevi vor lua cunoștință de conținutul unor probleme pe care nu le găsesc în manuale și care vor contribui la ridicarea nivelului lor de cunoștințe.

Problemele din această culegere sînt grupate pe disciplinele matematicii care se studiază în școala de cultură generală: aritmetică, geometrie, algebră, trigonometrie. Unele probleme al căror conținut vizează două sau mai multe discipline matematice au fost introduse în capitolul denumit „Probleme diverse".

În cadrul fiecărui capitol, problemele au fost orînduite pe clase și anii cînd a avut loc olimpiada respectivă.

Prin conținutul lor, multe probleme sînt legate de practică, altele teoretice sînt menite să dezvolte gîndirea creatoare a elevului; în multe din soluțiile oferite de autor, elevul va găsi metode noi pentru rezolvarea problemelor, pe care le va putea aplica și în alte împrejurări.

Autorul s-a străduit să dea cele mai bune soluții. Noi sfătuim totuși pe cititor să reflecteze și la alte soluții sau generalizări.

AUTORUL

PARTEA I

ARITMETICĂ

1. Victor își ridică banii depuși la C.E.C.

„Am să-mi cumpăr 4 caiete de 100 de file și 1 kg de mere, își zise el. Toate acestea costă 29,48 lei". Își numără banii și văzu că-i mai rămîn cîțiva lei.

A mai socotit el ce-a mai socotit și a văzut că-și poate cumpăra cu banii ce-i are 5 caiete de 100 de file și $1\frac{1}{4}$ kg de mere. De data aceasta nu i-a mai rămas nici un rest. Cîți bani a avut Victor?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a IV-a)

2. O coloană de pionieri merge spre Stadionul Tineretului făcînd 3 km pe oră. În drum se întîlnește cu o altă coloană de pionieri mai mari, care se înapoiau de la stadion mergînd cu 3,3 km pe oră. Un pionier din prima coloană vede trecîndu-i pe dinainte coloana a doua în 20 secunde, iar un pionier din coloana a doua vede trecînd prin fața sa prima coloană în 16 secunde. Gîndiți-vă, cît de lungi erau coloanele și cîți pionieri erau în fiecare coloană, dacă pionierii mergeau în rînduri de cîte doi și fiecare rînd ocupă 0,7 m?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a IV-a)

3. Livada unei gospodării agricole colective are forma unui dreptunghi cu perimetrul de 65 dam. Lungimea sa este cu 75 m mai mare decît lățimea. În livadă arborii sînt plantați în rînduri paralele, depărtați unul de altul și de gardul livezii cu cîte 5 m. Care este suprafața livezii și cîți arbori cuprinde?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a IV-a)

4. Pentru că — așa cum ați văzut în *Scînteia pionierului* — Gică-Notă-Mică întîrzie la școală, mama lui i-a pus ceasul înainte. Gică a plecat de acasă la ora 8 fără 5 minute, dar, cînd a ajuns la școală, a văzut cu mirare că era 8 fără 10 minute. La prînz, plecînd de la școală la ora 13 și 30 minute, a ajuns acasă, după ceasul lor, la ora 14 fără 5 minute. De atunci Gică se tot gîndește: cu cît este ceasul lor înainte? Spuneți, voi știți?

(R.P.R., O.T.M, 1953, cl. a IV-a)

5. Terenul unei gospodării agricole colective are o formă dreptunghiulară și este cultivat cu grîu. Folosindu-se metode agrotehnice avansate, s-a obținut o producție medie de 3 000 kg la ha.

Locul este înconjurat de o grupă de pionieri, care merg cu 3 km pe oră, într-o oră și 24 minute.

Calculați cîte tone de grîu s-au recoltat de pe întreg terenul, dacă lungimea sa este de șase ori mai mare decît lățimea.

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a IV-a)

6. În două bidoane se află lapte: în primul de două ori mai mult decît în cel de-al doilea. Cînd din primul s-au scos 30 litri iar din al doilea 20 litri, în primul a rămas lapte de trei ori mai mult decît în al doilea. Cît lapte era în fiecare bidon înainte de scoaterea laptelui?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a V-a și a VI-a, 1950, Kiev)

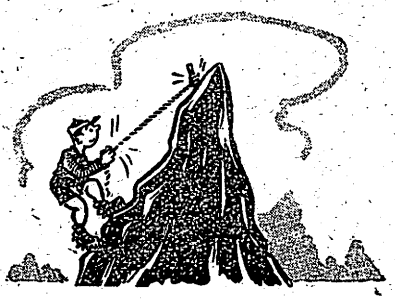
7. Biletul de intrare într-o grădină costă 1,50 lei. După reducerea prețurilor la bilete, numărul vizitatorilor a crescut cu jumătate și încasările au crescut cu un sfert. Cu cît a fost redus prețul biletelor?

(U.R.S.S, Olimpiada matematică, cl. a V-a și a VI-a, 1950, Kiev)

8. O veveriță aduce o alună în vizuină în 20 minute. Cît de departe de alun se află vizuina ei dacă se știe că veverița fuge fără alune 5 m/s, iar cu alune 3 m/s?

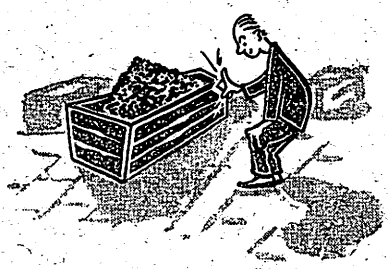
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a V-a și a VI-a, 1950, Kiev)

9. O grupă de pionieri își petrece vacanța într-o tabără la munte. Ei se hotărăsc să facă o excursie la o cabană situată pe partea cealaltă a muntelui, la o distanță de 4 km de tabără. Pentru a ajunge la cabană ei urcă pînă în vîrful muntelui și apoi coboară. Știind că ei urcă cu 1,5 km pe oră și coboară cu 4 km pe oră, să se calculeze lungimea urcușului și coborîșului, precum și durata drumului pînă la cabană, ținînd seama că la înapoiere fac cu 20 minute mai puțin ca la dus.



(R. P. R., O.T.M., 1953, cl. a V-a)

10. La o cooperativă, o ladă în care se ține orez are baza în formă de dreptunghi, cu lungimea de 60 cm și lățimea de 250 mm iar capacitatea ei este de 52,650 dm^3. Într-o zi se vinde atîta orez, încît înălțimea locului ocupat de el în ladă scade cu $\frac{1}{9}$. A doua zi se mai vinde 3 sferturi din ceea ce rămăsese, iar în a treia zi încă două treimi din cantitatea ce se mai găsea în ladă. Aflați cîți centimetri din înălțimea lăzii ocupă orezul rămas.



(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a V-a)

11. La București au început pregătirile pentru construcția unei lucrări. Înainte de a se definitiva planurile este nevoie să se cunoască natura terenului respectiv. Pentru aceasta se fac sondaje la diferite adîncimi, scoborîndu-se cu ajutorul unui scripete diferite aparate, care apoi sînt ridicate la suprafață.

Dacă se fac 7 coborîri și 8 ridicări, e nevoie de un timp cu $1\frac{1}{6}$ minute mai lung decît dacă se fac 8 coborîri și 7 ridicări.

Cîte minute durează o coborîre și cîte minute o ridicare, dacă pentru 5 coborîri și 5 ridicări sînt necesare $30\frac{5}{6}$ minute?

(R.P.R., O.T.M., 1953, clasa a V-a)

12. La pomul de iarnă al unei școli elementare s-au împărțit elevilor din clasele ciclului al doilea un număr de cărți de povești. Cărțile au fost împărțite astfel: cl. a VII-a a primit 20/63 din numărul total al cărților și 2/7 de carte, cl. a VI-a a primit 7/16 din numărul cărților rămase și 3/4 de carte, iar cl. a V-a 8/9 din restul cărților și 2/3 de carte. Toate cărțile au fost împărțite, fără ca totuși vreuna să fi fost ruptă. Cîte cărți au fost și cîte a primit fiecare clasă?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a V-a)

13. În fiecare dimineață, la ora 6, pe patru dintre liniile metroului din Moscova pornesc deodată primele trenuri. Trenul de pe prima linie are plecările de la capătul de linie la fiecare 22 minute, cel de pe linia a doua la fiecare 24 minute, cel de pe linia a treia la fiecare 33 minute și ultimul din 36 în 36 de minute. Gîndiți-vă, pionieri, la ce oră vor pleca din nou toate o dată, de la capul de linie, cele patru trenuri și cîți kilometri are fiecare din cele patru linii, dacă trenurile merg cu 40 km pe oră și 1/10 din timp reprezintă opririle în stații!

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a V-a)

14. În momentul cînd o garnitură de vagonete de pe un șantier de construcție a realizat 195 încărcături, intră în lucru și o a doua garnitură de vagonete. După cîte încărcături ale acesteia din urmă, cele două garnituri vor fi scos tot atît pămînt, dacă în timp ce a doua garnitură realizează 5 încărcături, prima realizează 8, însă 4 încărcături ale garniturii a doua, care are vagonete mai mari, fac cît 9 încărcături ale celei dintîi?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a V-a)

15. Din cauza variației de temperatură, un ceasornic înaintează cu $\frac{1}{2}$ minut ziua și rămîne cu $\frac{1}{3}$ minut noaptea. Socotind ziua și noaptea fiecare de cîte 12 ore să se calculeze peste cîte zile acel ceasornic va arăta o diferență de 5 minute.

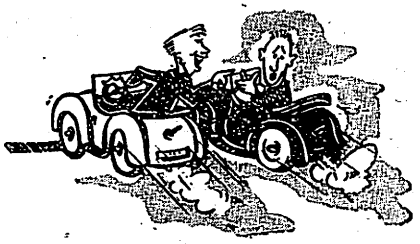
(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

16. Doi pionieri citesc aceeași carte. După ce primul a citit 165 de pagini, iar cel de-al doilea 225 pagini, se constată

că primului i-au mai rămas de citit de cinci ori mai mu pagini decît celui de-al doilea. Cîte pagini are cartea?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

17. Trei autobuse pleacă dintr-o piaţă la ora 6 dimineaţa în trei direcţii şi se întorc în felul următor: primul peste o oră şi un sfert şi pleacă din nou peste cinci minute, pe acelaşi traseu. Al doilea se întoarce după o oră şi 30 minute, şi pleacă din nou după 6 minute; iar al treilea se întoarce după o oră şi 52 minute şi pleacă din nou după 8 minute. La ce oră vor pleca din nou în acelaşi timp, din piaţă, cele trei autobuse?



(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

18. Două automobile pornesc din acelaşi loc şi către aceeaşi destinaţie, unul în urma celuilalt la un interval de 3 ore. Primul merge cu o viteză de 48 km pe oră, iar cel de-al doilea, cu 60 km pe oră, ajungînd la destinaţie în acelaşi moment. Care a fost distanţa parcursă?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

19. În clasele a V-a A şi a V-a B ale aceleiaşi şcoli, au fost în total 64 elevi. Trecînd 3 elevi din prima clasă în cealaltă, rămîne în prima clasă un efectiv cu 2 elevi în plus faţă de a doua. Cîţi elevi au fost la început în fiecare clasă?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

20. Un kilogram de cafea prăjită şi amestecată avînd 60 % cafea naturală şi restul năut costă 128 lei. Cît costă kilogramul de cafea naturală neprăjită ştiind că prin prăjire se pierde $\frac{1}{5}$ din greutate şi că un kilogram de năut prăjit costă 20 lei?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

21. Frăţiorul lui Ionel s-a jucat cu guma şi a şters din caietul de notiţe cîteva cifre de la o împărţire de numere. Apoi, în locul cifrelor şterse a desenat cîte un pătrăţel, rămînînd scris astfel:

3 □ 7 □ 2 : 2 □ 2 = □ 4 □.

Arătați cum se pot găsi cifrele șterse și apoi faceți verificarea.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

22. Dacă împărțim numerele 9 428 și 3 235 prin același număr se obțin respectiv resturile 13 și 7. Care este împărțitorul? (R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

23. Doi călători discutau în tren, privind stîlpii de telegraf care se perindau înaintea lor. Unul din ei l-a întrebat pe celălalt dacă poate să afle cît timp trebuie să numere intervalele dintre doi stîlpi consecutivi, astfel ca rezultatul numărării să fie numărul de kilometri pe oră cu care se mișcă trenul. Celălalt, care știa că distanța între doi stîlpi consecutivi este de 62,50 metri, i-a dat rezultatul după o mică socoteală.

Care sînt calculele pe care le-a făcut acest călător pentru a răspunde la problemă?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

24. Ce este mai mult, 15% din 36 sau 36% din 15?

(Generalizare. Care din proprietățile fundamentale ale operațiilor intervin aici?)

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

25. Prin calculele aritmetrice, să se afle ce număr trebuie pus în locul lui x pentru a avea egalitatea:

$$\left[\left(12\frac{1}{2}-2\right):\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{40}\right)-\left(2+6\frac{2}{3}\right):\left(1\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}\right)\right]:x=8$$

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

26. Ce sumă a avut cineva, dacă după ce a cheltuit $\frac{2}{5}$ din sumă a mai cheltuit încă $\frac{3}{4}$ din cît îi mai rămăsese după prima cumpărătură și i-au mai rămas necheltuiți 293,10 lei. (Verificare.)

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

27. Prin calcule aritmetice să se afle numărul care trebuie pus în locul literei x pentru a avea loc egalitatea:

$$\left\{\left[\left(\frac{3x-4}{5}-15\frac{1}{3}\right)\cdot 3-2+\frac{3}{4}\right]:\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}\right\}:\frac{1}{48}=144$$

(După aflarea lui x să se facă verificarea.) (R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

28. Un lucrător tipograf culege $2\frac{3}{16}$ pagini de text în $3\frac{1}{2}$ ore. După $1\frac{2}{5}$ ore de la începutul lucrului se alătură la lucru un alt tovarăș care culege $\frac{1}{2}$ pagină în 40 minute. La sfîrșitul zilei se constată că fiecare a cules același număr de pagini. Cîte pagini s-au cules în total?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

29. Într-o gospodărie agricolă colectivă s-au însămînțat în prima zi $\frac{4}{15}$ din întreaga suprafață; în a doua zi $\frac{5}{8}$ din rest; în a treia zi $\frac{7}{9}$ din ce a mai rămas; în a patra zi $\frac{4}{5}$ din noul rest, iar în a cincea zi $2\frac{1}{2}$ ha, terminîndu-se întreaga lucrare. Cîte hectare s-au însămînțat în fiecare zi?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a V-a)

30. Prețul unui exemplar din *Gazeta Matematică și Fizică* — seria B — este un leu; iar prețul unui exemplar din seria A este 2,25 lei. La o școală s-au cumpărat în total 140 exemplare cu 160 lei. Să se calculeze numărul de exemplare cumpărate din seria A și numărul celor din B.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

31. Într-o cantină sînt 7 duzini de farfurii și un număr de pahare. Cînd s-au spart 9 farfurii și 3 pahare, au rămas cu 32 farfurii mai multe decît pahare. Cîte pahare au fost?

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

32. Întreitul unui număr a fost micșorat cu patru și apoi s-a înmulțit rezultatul obținut cu cinci. La produsul obținut s-a adăugat 8 și apoi s-a împărțit prin 7 și s-a obținut cîtul 39. Să se afle care a fost numărul cu care s-a început calculul? (R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

33. Distanța București-Satu Mare este de 600 km. La ora 12 pleacă din București un tren personal care face 30 km pe oră; iar la ora 14 pleacă din Satu Mare un tren accelerat. Cîți kilometri pe oră face accceleratul dacă cele două trenuri se întîlnesc la mijlocul drumului?

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

34. Drumul București-Moscova, cu avionul, durează 56 ore mai puțin decît cu trenul. Să se calculeze cît durează călătoria cu trenul dacă avionul merge de 8 ori mai repede ca trenul?

(R. P. R., O. T. M., 1955, cl. a V-a)

35. O persoană face cumpărături dintr-un magazin, de o treime din suma ce avea, plus 90 lei. La alt magazin mai cheltuiește o treime din ce-i mai rămăsese și încă 60 lei, iar în al treilea magazin mai cheltuiește o treime din noul rest și încă 20 lei și astfel rămîne cu 20 lei necheltuiți. Cît a cheltuit în fiecare magazin? (Verificare.)

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

36. Să se găsească cel mai mic număr care împărțit la 3, 5 și 7 să dea același rest 2.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

37. Să se găsească două numere știind că produsul lor este egal cu 6 750 și c.m.m.d.c. al lor este 15.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a V-a)

38. Diferența a două numere este 271. La împărțirea lor se obține cîtul 7 și restul 13. Să se afle aceste numere.

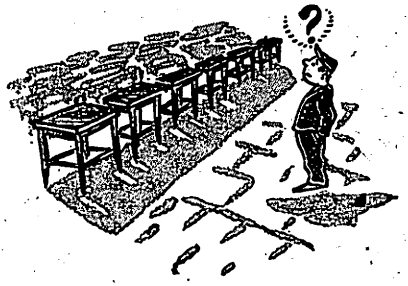
(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

39. O carte și un registru costă împreună 23 lei. Dacă micșorăm cu 2 lei prețul registrului și mărim prețul cărții cu 4 lei, atunci cartea devine de 4 ori mai scumpă decît registrul. Cît costă fiecare?

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

40. În decursul anului, la o fabrică de mobile producția de mese a crescut în fiecare lună cu 10 mese față de luna trecută

iar în tot cursul anului s-au fabricat 1 920 de mese. Cîte mese s-au fabricat în luna iunie? Dar în decembrie?



(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

41. O carte costă cu 16,50 lei mai mult decît un caiet. Se mai ştie că preţul acestei cărţi este cît preţul a 8 caiete şi încă 75 bani.

Să se afle cît costă 3 cărţi şi 7 caiete împreună.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

42. Să se înlocuiască cu cifre literele a şi b din numerele $7a\ 4b$; $64\ ab$, astfel ca aceste numere să fie divizibile prin 8 şi 9, iar nedivizibile prin 5.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

43. Într-o şcoală sînt mai puţini de 200 pionieri. Dacă se formează grupe de cîte 6, de cîte 7 şi de cîte 8 pionieri, rămîne mereu o grupă necompletă alcătuită din 5 pionieri. Cîţi pionieri sînt în acea şcoală?

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

44. Să se calculeze:

$$F = \frac{2 + \dfrac{5}{\dfrac{3}{4}} - \dfrac{\dfrac{4}{3}}{5} : \left| \dfrac{6}{7} - \left(1 - \dfrac{1}{12}\right) \right.}{1 + \dfrac{2}{3 + \dfrac{4}{5}} - \dfrac{5 - \dfrac{7}{6}}{2 + \dfrac{3}{4 - 1{,}5}}}$$

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

45. Acceleratul face distanţa Bucureşti-Oradea în 12 ore, iar personalul în 15 ore. Ştiind că acceleratul merge cu 10 km

pe oră mai repede decît personalul, să se afle distanţa de la Bucureşti la Oradea.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a V-a)

46. La o întrecere în rezolvări de probleme organizată de gazeta de perete a şcolii, se dau 5 puncte pentru o problemă bine rezolvată şi se scad 3 puncte pentru o problemă greşită. Un elev a trimis rezolvările a 10 probleme şi a obţinut 26 puncte. Să se afle cîte probleme a rezolvat şi la cîte a greşit.

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a V-a)

47. Un ţăran are un număr de găini de cinci ori mai mare decît de raţe. El vinde 5 găini şi cumpără 3 raţe şi astfel numărul găinilor devine de trei ori mai mare decît al raţelor. Cîte găini şi cîte raţe a avut ţăranul în cele din urmă?

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a V-a)

48. Un ceas rămîne în urmă cu 105 secunde în 9 ore. Să se afle cu cîte minute şi secunde rămîne în urmă timp de 24 ore.

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a V-a)

49. La o construcţie au fost necesare 360 000 cuie. Cuiele s-au vîndut în lăzi cu greutatea netto de 20 kg la preţul de 90 lei lada. Ce sumă s-a plătit pentru toată cantitatea de cuie necesare, dacă 1 000 de cuie cîntăresc 30,2 kg, iar pentru transportul a 50 de lăzi s-au mai plătit cîte 91 lei?

(R.P.R., O.T.M., 1957 cl. a V-a)

50. Cinci elevi pleacă într-o excursie aducînd, respectiv, sumele : 80, 90, 110, 115 şi 125 lei. Fiecare dintre ei a cheltuit aceeaşi sumă. La înapoiere, elevilor le-au rămas 120 lei necheltuiţi. Cum se împarte acest rest între cei cinci elevi excursionişti?

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a V-a)

51. Să se găsească un număr prim de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor lui este 252.

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a V-a)

52. Să se calculeze:

$$E = \frac{4 - \frac{3}{\frac{4}{5}} + \frac{\frac{1}{2}}{6} : \frac{7}{8} + 1}{3 + \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{3 - \frac{8}{5}}{1 + \frac{3}{1,2}}}$$

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a V-a)

53. Stîlpii de telegraf aşezaţi de-a lungul căii ferate sînt puşi la o distanţă de 50 de metri unul de altul. Cîte minute trebuie să staţi la fereastră pentru a număra atîtea intervale dintre stîlpi cîţi kilometri face trenul pe oră?

(R.P.R., O. T.M., 1953, cl. a VI-a)

54. Pe mesele a două raboteze (maşini de prelucrat metale) de mărimi diferite, sînt aşezate cap la cap, pe prima trei piese egale, late de cîte 14 cm şi cu lungimea totală de 66 cm, iar pe a doua 5 piese de aceeaşi mărime. Mesele rabotezelor au o mişcare de du-te-vino. Cînd ele se mişcă într-un sens, cuţitul rabotezei taie un strat de metal, cînd ele se mişcă în sens opus, cuţitul se ridică şi mesei îi trebuie un timp de două ori mai mic ca să revină în poziţia de la început.

Între o cursă şi alta, cuţitul se deplasează cu 2 mm, perpendicular pe direcţia de mişcare a mesei. Ştiind că prima raboteză face 20 de curse duble în 9 minute şi că raportul dintre vitezele de tăiere ale celor două raboteze este 2/3, să se calculeze vitezele de tăiere ale celor două raboteze în metri pe minut şi timpul necesar fiecărei raboteze pentru prelucrarea pieselor în întregime.

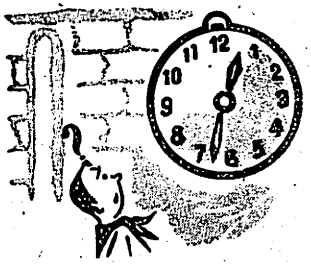
(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VI-a)

55. Să se afle valoarea lui x din egalitatea:

$$\frac{3 - \frac{0,045}{0,12}}{0,17x} = \frac{3\frac{1}{2} - \left(3\frac{0,2}{1,5} - \frac{2}{3}\right)}{\frac{8}{7} - \frac{4,2}{6\frac{1}{5}}},$$

apoi să se verifice rezultatul.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)



56. Un elev privind ceasornicul şcoalei observă că acele sînt în prelungire şi aşezate astfel: cel care arată orele este situat între 12 şi 1, iar minutarul între 6 şi 7. Cît este ora?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

57. Două roţi dinţate sînt angrenate astfel: roata cea mai mare are 54 dinţi şi fiind fixă nu se poate roti, iar roata cea mică are 36 dinţi şi se poate roti în jurul celeilalte roţi. Înainte de a se începe mişcarea se însemnă cu cretă cei doi dinţi care sînt în contact.

Se întreabă: cîte ture face roata mică în jurul centrului său şi cîte ture face în jurul roţii mari pînă ce dinţii însemnaţi vor avea iarăşi poziţia de la începutul mişcării?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

58. O sumă de bani a fost împărţită în două părţi: prima parte este egală cu $\frac{1}{2}$ din întreaga sumă minus 153 lei, iar a doua egală cu $\frac{3}{5}$ din rest şi încă 452. Să se afle suma întreagă şi fiecare parte.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

59. Sfatul popular al unui oraş a repartizat suma de 1 159 000 lei pentru şcoală, căminul cultural şi spital. Fiecare din aceste instituţii îşi măreşte prin mijloace proprii venitul şi anume: şcoala cu 10%, căminul cultural cu 8%, iar spitalul cu 5% şi astfel veniturile lor devin egale între ele. Ce sumă a dat sfatul popular fiecărei instituţii?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

60. Lungimea unui dreptunghi este de 3 ori mai mare decît lăţimea sa. Dacă mărim lungimea sa cu 4 cm şi lăţimea cu 6 cm, aria sa creşte cu 108 cm^2. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

61. Plecînd de acasă, elevul Ionescu se uită la ceas şi vede că ora este 8 şi 35 minute. Cînd ajunge la gară el constată că ceasul „*căilor ferate*" arată ora 8 şi 30 minute. Ionescu pleacă de la gară la ora 10 şi 48 de minute după ceasul „*căilor ferate*" şi ajunge

acasă la ora 11 şi 23 minute, după ceasul lui. Ştiind că ambele ceasuri funcţionează bine, însă ora oficială este aceea a *„căilor ferate"*, se întreabă cum trebuie să-şi potrivească Ionescu ceasul pentru a arăta ora oficială, drumurile de acasă la gară şi de la gară înapoi fiind parcurse în timpuri egale.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

62. Alege un număr oarecare, scrie la dreapta lui cifra 7, scade din numărul astfel obţinut de 9 ori numărul pe care ţi l-ai ales la început şi spune-mi cît ţi-a ieşit? Eu scad numărul 7 din acest număr şi îţi spun ce număr ţi-ai ales. Cum se poate?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

63. Să se demonstreze că, dacă la un număr de două cifre adăugăm de 9 ori diferenţa dintre cifra unităţilor şi aceea a zecilor (atunci cînd cifra unităţilor este mai mare decît aceea a zecilor), obţinem un număr scris cu aceleaşi cifre, dar luate în ordine inversă. Cum trebuie enunţată regula, atunci cînd cifra zecilor este mai mare decît cifra unităţilor?

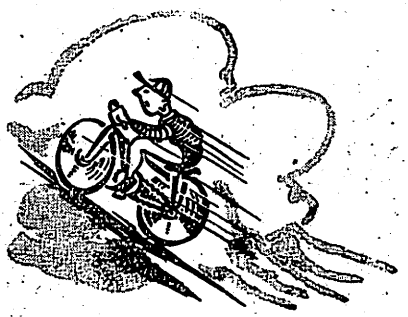
(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

64. Ca să ridice la pătrat un număr terminat cu cifra 5, pionierul Georgescu înmulţeşte zecile numărului cu consecutivul acestuia şi alătură la produs numărul 25. De pildă, pentru ridicarea la pătrat a numărului 125, el înmulţeşte pe 12 cu 13 şi la rezultatul înmulţirii, 156, alătură pe 25 şi obţine $125^2 = 15\,625$.

Explicaţi acest procedeu simplificat de ridicare la pătrat a numerelor care se termină cu cifra 5.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

65. Un biciclist are de parcurs 192 km. El face pe drum orizontal 25 km pe oră, la urcuşuri face 15 km pe oră, iar la coborîşuri face 30 km pe oră. Lungimea urcuşurilor este $\frac{10}{7}$ din aceea a coborîşurilor. Dacă la întors a făcut cu 48 minute mai puţin decît la dus, să se calculeze cîţi kilometri a mers pe drumuri orizontale, cîţi kilometri a urcat şi cîţi a coborît?



(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a VI-a)

66. Deschizîndu-se un robinet, se umple un bazin de 168 hl în 24 ore. Un alt robinet umple un bazin de 60 hl în 12 ore. Dacă ar curge ambele robinete împreună, să se afle cît timp ar umple un bazin de 204 hl?

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl a VI-a)

67. O lucrare poate fi terminată de Ion şi Dumitru în 7 ore. Aceeaşi lucrare poate fi terminată de Dumitru şi Nicolae în 8 ore; iar dacă ar lucra numai Ion, ar termina aceeaşi lucrare în 16 ore şi 40 minute. Au lucrat toţi trei împreună, Ion, Dumitru şi Nicolae, şi au primit în total suma de lei 180. Să se afle:

a) În cît timp au terminat lucrarea toţi trei împreună?

b) Ce sumă se cuvine fiecăruia?

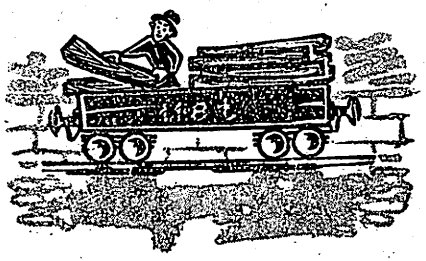
c) Verificare.

(R. P. R., O. T. M., 1956, cl. a VI-a)

68. La o staţie de maşini şi tractoare soseşte un vagon care conţine 8 500 kg motorină cu densitatea 0,87. În cîte butoaie a 200 litri se va putea transporta această cantitate de motorină?

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VI-a)

69. Într-un vagon s-au pus 11,8 tone de grinzi de brad şi de stejar, în total 30 grinzi. O grindă de brad cîntăreşte 0,28 tone, iar una de stejar 0,48 tone. Să se calculeze cîte grinzi de brad şi cîte de stejar s-au aşezat în acel vagon.



(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a VI-a)

70. Terenul unei grădini şcolare a fost repartizat astfel: 0,32 din el pentru cartofi; 0,28 din el pentru fasole; $\frac{2}{7}$ din el pentru ceapă şi restul pentru flori. Care este aria terenului repartizată pentru fiecare din aceste culturi, ştiind că pentru fasole şi flori la un loc s-au repartizat 210 m².

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl a VI-a)

71. Un anticariat a obținut cărți cu o reducere de 20% față de prețul nominal și le-a vîndut la prețul nominal. Cîte procente de cîștig s-au obținut?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a, 1949, Kiev)

72. De cîte ori în 24 ore acele ceasornicului sînt perpendiculare între ele?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1952, Kiev)

73. Cîte zerouri are numărul $50! = 1.2.3.4. \ldots 49.50$?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a, 1950, Lwow)

74. În 500 de lăzi sînt mere. Se știe că o ladă nu poate cuprinde mai mult de 240 de mere. Să se demonstreze că cel puțin 3 lăzi conțin același număr de mere.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a, 1950, Kiev)

75. Să se demonstreze că o fracție complimentară pînă la 1 cu o fracție ireductibilă este și ea ireductibilă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică cl. a VII-a și a VIII-a, 1950, Kiev)

76. Un colectivist are un coș cu mere. La întrebarea: cîte mere are în coș el răspunde: cînd mutam dintr-un loc într-altul cîte 2, cîte 3, cîte 4, cîte 5 și cîte 6 mere rămînea cîte un singur măr în coș, iar cînd mutam cîte 7 nu rămînea nici un măr. Cîte mere a avut colectivistul?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a, 1951, Kiev)

77. Să se arate că $43^{43} - 17^{17}$ se împarte fără rest la 10.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1952, Kiev)

78. Să se găsească un număr de două cifre egal cu dublul produsului cifrelor lui.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1952, Kiev)

79. Să se demonstreze că pentru nici un n pozitiv întreg, numărul $n^2 + 8n + 15$ nu este divizibil cu $n + 4$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1953, Moscova)

80. Pentru numerotarea paginilor unui dicționar sînt necesare 2 322 cifre. Cîte pagini conține acest dicționar?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

81. Dacă dintr-un număr N de trei cifre scădem 7, el se împarte la 7; dacă scădem 8, el se împarte prin 8, iar dacă scădem 9, atunci el se împarte cu 9. Care este acel număr?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

82. Să se găsească toate numerele de patru cifre care adăugate în dreapta la numărul 400 dau ca rezultat un pătrat perfect.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

83. Să se găsească suma: $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n/n+1}$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

84. Să se determine valoarea maximă a raportului dintre un număr de trei cifre și suma cifrelor sale.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Moscova)

85. Să se demonstreze că dacă la un număr întreg oarecare i se adaugă inversul lui, rezultatul se ridică la pătrat și apoi se scade pătratul inversului lui, atunci se obține un număr întreg.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Astrahan)

86. Există două numere m și n întregi, care să verifice ecuația $m^2 + 1954 = n^2$?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Moscova)

87. Toate numerele întregi începînd cu unitatea sînt scrise la rînd. Care cifră se află pe locul al 1955-lea?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1955, Kiev)

88. Să se găsească patru numere neegale pozitive întregi știind că suma lor este egală cu produsul celui mai mare și celui mai mic, plus produsul celorlalte două.

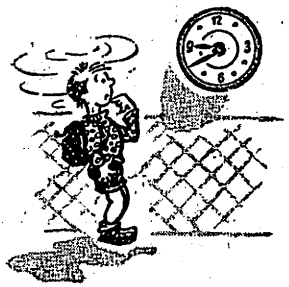
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1955, Kiev)

89. Un ceasornic care merge regulat arată ora 6 și 52 minute.

a) Să se calculeze unghiul format de acele ceasornicului care arată orele și minutele.

b) Să se calculeze după cîte ore, minute și secunde cele două ace vor fi perpendiculare între ele.

(R.P.R., 1956, cl. a VII-a)



90. Un ceasornic care merge regulat arată ora 9 și 40 minute.

a) Să se calculeze unghiul format de acele care arată respectiv orele și minutele.

b) Peste cît timp cele două ace vor fi perpendiculare unul pe celălalt?

(R.P.R., 1956, școli profesionale)

91. Un călător pleacă din localitatea A către localitatea B cu o viteză de 4 km pe oră. După ce a parcurs $1\frac{2}{3}$ km, el este întîlnit de o căruță care a plecat din A cu un sfert de oră după el; după ce călătorul a mai parcurs 13 km, el este întîlnit a doua oară de aceeași căruță, care se întoarce din localitatea B, unde a stat o jumătate de oră. Ce distanță este între localitățile A și B?

(Iași, 1953, Anul II școli pedagogice)

92. S-a amestecat vin de 3 calități. S-au luat 13 litri de calitatea I, 10 litri de calitatea a II-a și 12 litri de calitatea a III-a. Tot amestecul a costat 494 lei. Prețul unui litru de vin de calitatea I e mai mare decît al unui litru de calitatea a II-a cu 4 lei și mai mare decît al unui litru de calitatea a III-a cu 8 lei.

Cît a costat un litru de vin din fiecare calitate?

(București, 1953, Anul I școli pedagogice)

93. Două brigăzi de la S.M.T. Lugoj, avînd împreună 25 tractoriști, ară în 12 zile 2040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi, iar din a doua 8 ha pe zi. Se cere:

a) Cîți tractoriști sînt în fiecare brigadă?

b) Cîtă economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economisește 2 litri combustibil la ha și a doua 1,5 litri la ha și dacă litrul de combustibil costă 2,20 lei?

(Timișoara, 1953, Anul I școli pedagogice)

94. În anul 1954, numărul oamenilor muncii din R.P.R. trimiși la odihnă a întrecut numărul celor trimiși în 1952 cu 160 000 și al celor trimiși în 1950 cu 334 000.

Să se afle câți oameni ai muncii au fost trimiși la odihnă în 1954, știind că în 1952 numărul celor trimiși întrecea cu 8 000 dublul numărului celor plecați în 1950.

(București, 1955, Anul I școli pedagogice)

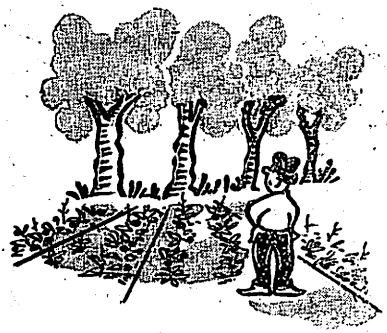
95. Să se găsească două numere întregi cunoscînd suma lor S și cel mai mare divizor comun al lor D. Aplicații: 1) $S = 700$; $D = 100$; 2) $S = 1323$, $D = 147$.

(R.P.R., 1955, Anul I școli pedagogice)

96. S-au cumpărat $4\frac{1}{4}$ kg orez și $1\frac{1}{2}$ kg macaroane, în total de lei $47\frac{17}{20}$; altă dată s-au cumpărat 4 kg griș și $4\frac{1}{2}$ kg biscuiți cu suma de $65\frac{1}{4}$ lei.

Un kg orez este de două ori mai scump decît 1 kg de griș, iar 1 kg de macaroane costă mai puțin decît 1 kg de biscuiți cu $4\frac{1}{10}$ lei. Cît costă cîte 1 kg din fiecare?

(București, 1953, Anul II școli pedagogice)



97. Grădina de zarzavat a unei gospodării agricole de stat e împărțită în două loturi a căror diferență este de 77 ari. Se știe că $\frac{5}{7}$ din primul lot sînt egale cu $\frac{8}{9}$ din lotul al doilea. Să se afle ce suprafață are fiecare lot.

(București, 1953, Anul II școli pedagogice)

98. La o fabrică lucrau bărbați și femei. Numărul bărbaților și numărul femeilor erau proporționale cu 4 și 1. Mărindu-se anual numărul muncitorilor cu 50%, peste 3 ani numărul bărbaților și femeilor erau în raportul 5 : 3. Numărul femeilor a devenit egal cu 2025. Cîte femei și cîți bărbați au fost la început în fabrică?

(București, 1953, Anul III școli pedagogice)

99. O sumă de bani este împărțită ca premiu la trei elevi proporțional cu numerele 4, 5 și 8. Cu suma primită, primul elev s-a dus la o librărie ca să-și cumpere două cărți: prima costă 65%, iar cea de-a doua 57,5% din totalul banilor pe care-i are și de aceea nu-i ajung pentru cumpărarea cărților 4,50 lei. Cît costă amîndouă cărțile la un loc? Cît costă fiecare carte? Ce sumă a primit fiecare elev?

(București, 1953, Anul III școli pedagogice)

100. Să se arate că ecuația $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ nu are soluții pozitive întregi.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1952, Kiev)

101. Să se demonstreze că numărul $N=\underbrace{100\ldots00}_{49}\underbrace{500\ldots01}_{99}$ nu este cubul unui număr întreg.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a 1953, Chișinău)

102. Să se demonstreze că pentru orice numere întregi a și b, numărul $ab\,(a+b)$ este par.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Ordjonikidze)

103. În ce sistem de numerație este valabilă egalitatea: $4\cdot 13=100$?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Kiev)

104. Să se găsească un număr de 4 cifre egal cu puterea a 4-a a sumei cifrelor lui. Să se demonstreze unicitatea soluției.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

105. Să se găsească două numere știind că suma lor este egală cu 667, iar cîtul din împărțirea celui mai mic multiplu comun prin cel mai mare divizor comun este egal cu 120.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

106. Suma unui anumit număr de numere naturale succesive începînd cu unitatea este egală cu un număr de trei cifre ale cărui cifre sînt toate identice. Cîte numere s-au luat?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1955, Kiev)

107. Să se găsească suma:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.+\frac{1}{99.100}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956, Ordjonikidze)

108. Să se demonstreze prin metoda inducției matematice, următoarea egalitate :

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956, Ordjonikidze)

109. Raportul dintre valorile a două monede este egal cu 1/3. Cîte monede trebuie luate din primul și al doilea tip pentru a obține un număr de bani egal cu produsul valorilor lor, numărul tuturor monedelor fiind multiplu de 3?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1950, Kiev)

110. Ce cifre pot înlocui zerourile din locurile trei și cinci ale numărului 3 000 003, pentru a obține un număr divizibil prin 13?

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

111. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural par atunci numărul $13^n + 6$ este divizibil prin 7.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

112. Să se demonstreze că orice număr prim impar poate fi reprezentat ca diferența pătratelor a două numere naturale și aceasta numai într-un singur mod.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

113. Să se demonstreze că produsul a doi factori în care fiecare este suma pătratelor a două numere întregi este de asemenea suma pătratelor a două numere întregi.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

114. Să se găsească două numere știind că suma cîturilor din împărțirea fiecăruia din ele prin cel mai mare divizor comun este egală cu 18, iar c.m.m.m.c. este 975.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1952, Kiev)

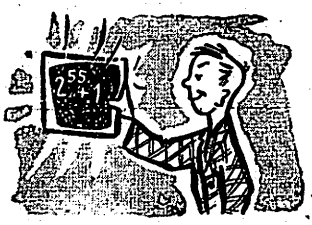
115. Să se demonstreze că suma a două numere naturale consecutive și suma pătratelor lor sînt numere prime între ele.
(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

116. S-a alcătuit tabloul:

$$1 = 1$$
$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Să se scrie o astfel de formulă pe linia n^{-a} a tabloului, care după substituirea lui $n = 1, 2, 3, 4$ să dea cele patru linii de mai sus ale tabloului și care să fie adevărată pentru orice n număr natural.
(R.P.P., 1952 — 1953, categoria A)

117. Să se demonstreze că suma: $S = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ este egală cu un număr întreg pentru orice valoare pozitivă a lui n.
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)



118. Să se demonstreze că numărul $2^{55} + 1$ este divizibil prin 11.
(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

119. Să se afle după cîte minute — după ce ceasornicul arată ora 4 — minutarul ajunge acul orar.
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

120. Să se cerceteze dacă există o fracție cu numitorul egal cu 20, mai mare decît $\frac{4}{13}$ și mai mică decît $\frac{5}{13}$.
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

121. Să se arate că dacă trei numere prime mai mari decît 3 formează o progresie aritmetică, rația progresiei se împarte la 6.
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1955, Kiev)

122. Să se găsească suma numerelor:

$$1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots11}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

123. Să se găsească suma:

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

124. Să se demonstreze că pentru orice a întreg, numărul $a^7 - a$ se împarte cu 42.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1950, Stalingrad)

125. O putere pară a unui număr este egală cu un număr de 4 cifre dintre care prima cifră este egală cu 3 iar ultima cu 5. Să se găsească acest număr.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1946, Kiev)

126. Ce formă trebuie să aibă două fracţii pentru ca diferenţa lor să fie egală cu produsul lor?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1946, Kiev)

127. Să se arate că dacă împărţim şirul tuturor numerelor impare în grupuri astfel încît numărul termenilor fiecărui grup să crească ca şirul numerelor naturale, atunci suma numerelor din fiecare grup va fi egală cu cubul numărului termenilor lui. (Problema lui Micomah din Geraza.)

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1952, Kiev)

128. În numărul $n = 121\ldots.5$, de opt cifre, pătrat perfect, să se reconstituie cele patru cifre necunoscute.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

129. Să se demonstreze că $n^5 - n$ este divizibil cu 30, n fiind un număr pozitiv oarecare.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

130. Cifrele unui număr de patru cifre (de la stînga la dreapta) sînt patru cifre consecutive. Să se găsească acest

număr dacă după permutarea primelor două cifre (de la stînga) se obține un număr egal cu un pătrat perfect.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Kiev).

131. În ce sistem de numerație 16 324 este pătratul exact al lui 125?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Kiev)

132. Să se arate că $3^{2n+2} - 8n - 9$ se împarte la 64, pentru orice n întreg.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1955, Kiev)

133. Să se demonstreze prin metoda inducției matematice următoarea egalitate:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a 1956, Ordjonikidze)

PARTEA a II-a

GEOMETRIE

134. Grădina unei şcoli elementare are forma unui paralelogram cu latura $\overline{AB}$ de 9 m şi latura $\overline{AD}$ de 15 m. Acest teren a fost împărţit astfel : pe latura $\overline{BC}$ s-a luat punctul M la o distanţă de 5 m de punctul B, iar pe latura $\overline{CD}$ s-a luat punctul N la 6 m de punctul C. S-au unit punctele M şi N cu punctul A, obţinîndu-se astfel două triunghiuri : ABM şi AND. Fiecare din cele două detaşamente de pionieri din şcoală au hotărît să îngrijească cîte unul din terenurile triunghiulare şi au pornit la întrecere, care din ele vor împodobi cu flori, mai frumos şi mai repede, parcela respectivă.

— Numai că triunghiul vostru ABD este mai mic decît al nostru, spuse un pionier din detaşamentul 1. Să punem asta în condiţiile întrecerii.

— Ba de loc, ele sînt egale, îi răspunse conducătorul detaşamentului 2.

Care din ei avea dreptate şi de ce?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VI-a)

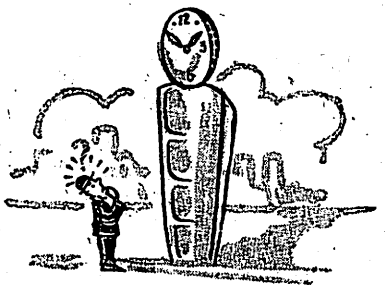
135. Un solar, în formă de triunghi isoscel ABC cu aria de 1200 mp cu perimetrul de 160 m şi baza $\overline{BC}$ de 60 m are 2 porţi : una (M) situată la mijlocul bazei şi alta (N) la o treime din lungimea bazei măsurată din punctul B. Un grup de copii îşi propun să sape de la poarta M un şănţuleţ în nisip, perpendicular pe AB şi unul perpendicular pe AC. Un alt grup de copii

vor să facă același lucru, pornind de la poarta N. Care dintre cele două grupuri va săpa mai mult?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VI-a)

136. Pe o foaie de hîrtie duceți o dreaptă oarecare. Pe dreaptă, acolo unde aceasta se întretaie cu marginea hîrtiei, se găsește un punct M. Tăiați din marginea foii o fîșie lată de 5 cm paralelă cu marginea hîrtiei, astfel încît o dată cu tăierea fîșiei să îndepărtați și punctul M.

Pe foaia de hîrtie rămasă, luați un alt punct P, fără a-l plasa însă la o distanță mai mică de 5 cm de marginea opusă celei pe care se află punctul M. Construiți dreapta MP, deși M se găsește în fîșia de hîrtie tăiată. Arătați cum ați procedat!



(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VI-a)

137. Ce unghi formează acele unui ceasornic la ora 2 fără 10′?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

138. Ce greșeală conține fiecare din figurile de pe pagina 32?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. VI-a)

139. În clasă, profesorul cere elevilor să taie din carton un triunghi isoscel în care o latură să fie de 12 cm, iar alta de 25 cm. În drum spre casă, doi elevi vorbesc despre problemă:

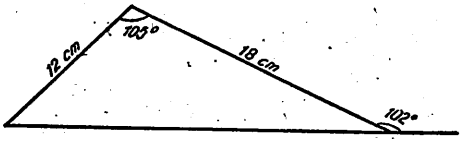
A. Nu știu cum să fac triunghiul, fiindcă nu ni s-a spus cît de mare trebuie să fie latura a treia.

B.: Atunci facem latura a treia ori de 12 cm, ori de 25 cm.

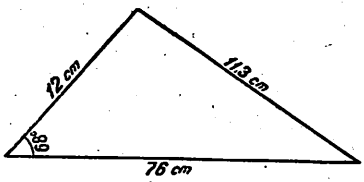
A doua zi, la ora de geometrie, se constată că triunghiurile aduse de toți elevii sînt egale. Este o întîmplare la mijloc?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

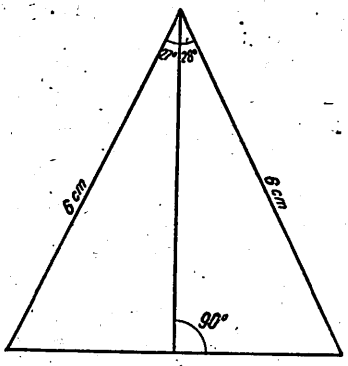
140. Două triunghiuri oarecare au cîte o latură respectiv egală. Înălțimea și mediana unui triunghi, care cad pe această


12 cm
105°
18 cm
102°

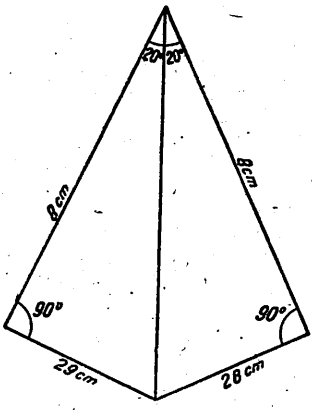
a


12 cm
113 cm
38°
76 cm

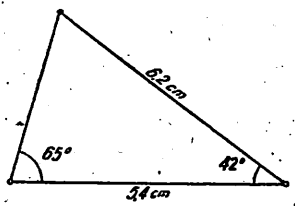
b


6 cm
6 cm
90°

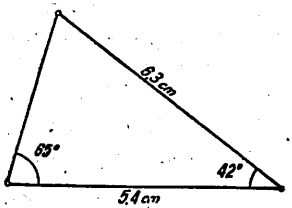
d


20°
20°
8 cm
8 cm
90°
90°
29 cm
28 cm

c


6.2 cm
65°
42°
5.4 cm

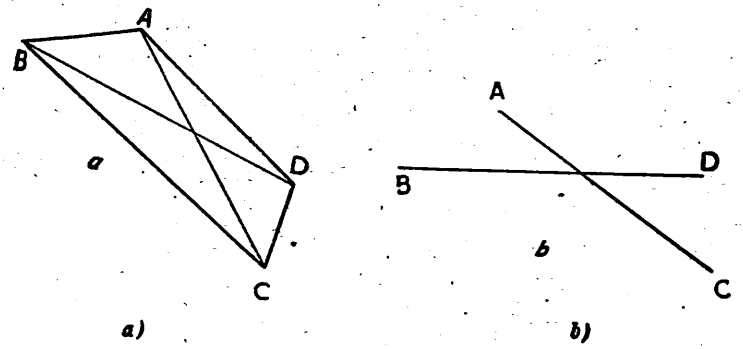
e


6.3 cm
65°
42°
5.4 cm

latură sînt respectiv egale cu înălțimea și mediana celuilalt triunghi. Putem afirma că aceste triunghiuri sînt egale?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

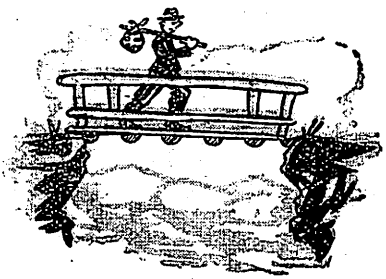
141. În proiectul unui oraș în construcție, trebuie unite



prin șosele drepte cele 4 puncte, A, B, C, D din figură. Există două proiecte: primul prevede ca șoselele să fie ca în figura a, iar celălalt, ca în figura b. În care proiect, lungimea totală a șoselelor este mai mică?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

142. Două comune sînt așezate de o parte și de alta a unui canal navigabil așezat în linie dreaptă, avînd malurile sale la aceeași distanță între ele. Sfaturile populare ale celor două comune propun să se construiască un pod perpendicular pe direcția canalului astfel ca cele două localități să fie egal depărtate de capetele podului.



Arătați construcția geometrică prin care se poate determina poziția podului și justificați construcțiile grafice pe care le faceți. Faceți desenul în creion cu rigla și compasul, lăsînd să se vadă construcțiile ajutătoare.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

143. Într-un triunghi, latura $\overline{AB}$ este mai mare decît latura $\overline{AC}$. Notînd cu M mijlocul laturii $\overline{BC}$, să se demonstreze că unghiul MAB este mai mic decît unghiul MAC.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VI-a)

144. Să se exprime mărimea unghiurilor formate de înălțimea $\overline{AA'}$ și înălțimea $\overline{BB'}$, într-un triunghi ABC cu unghiurile A, B, C, cunoscute. Caz particular $A = 64°28'$ și $B = 53°43'$.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a VI-a)

145. Să se arate că în orice dreptunghi $ABCD$ distanța de la vîrful A la diagonala $\overline{BD}$ este egală cu distanța de la vîrful C la dreapta dusă prin B paralelă cu diagonala $\overline{AC}$.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a VI-a)

146. Într-un triunghi ABC se dă $\widehat{ABC} = 41°$ și $\widehat{ACB} = 69°$. Se duce bisectoarea AD și înălțimea BE, care se taie în F. Să se calculeze $\widehat{BFD}$.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VI-a)

147. Se dă triunghiul ABC în care $\overline{AB} = \overline{BC}$. Se duce bisectoarea unghiului exterior lui CBA și pe ea se ia $\overline{BE} = \overline{AC} = 3$ cm. Știind că $\overline{EC} = 4$ cm să se afle perimetrul triunghiului ABC.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VI-a)

148. În triunghiul echilateral ABC paralela dusă din C la $\overline{AB}$ taie perpendiculara din A pe AB în punctul D. Să se arate că $\overline{CD}$ este jumătate din latura triunghiului echilateral.

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a VI-a)

149. Să se demonstreze că un poligon convex cu 13 laturi nu poate fi tăiat în paralelograme.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a, 1947, Moscova)

150. Să se demonstreze că semicercurile descrise pe două laturi ale unui triunghi, ca diametre, se intersectează pe latura a treia (sau pe prelungirea ei).

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a 1949, Kiev)

151. Printr-un punct M luat în interiorul unghiului A să se traseze o dreaptă care să secționeze din unghi un triunghi de arie minimă. (U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a și a VIII-a, 1949, Kiev)

152. Se dau două drepte perpendiculare între ele. Un segment de lungime constantă lunecă cu extremităţile sale pe dreptele date. Să se găsească locul geometric al centrelor de greutate ale triunghiurilor ce se obţin.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a şi a VIII-a, 1950, Kiev)

153. Un triunghi ABC este echilateral. Pe prelungirea $\overline{CE}$ a laturii $\overline{AC}$ se construieşte un al doilea triunghi echilateral CDE. Punctul M este mijlocul segmentului $\overline{AD}$, iar punctul N este mijlocul segmentului $\overline{BE}$. Să se arate că CMN este un triunghi echilateral.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a şi a VIII-a, 1950, Kiev)

154. Aria unui cerc este împărţită printr-un cerc concentric în două părţi egale. Să se demonstreze că partea de coroană cuprinsă între două tangente paralele la cercul interior şi arcele cercului exterior este echivalentă cu pătratul înscris în cercul mic.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a şi a VIII-a, 1951, Kiev)

155. Să se arate că dreptele care unesc centrele pătratelor construite pe laturile unui paralelogram înspre exteriorul lui formează un pătrat.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1952, Kiev)

156. Să se construiască un romb cu condiţia ca două vîrfuri opuse să fie situate în două puncte date, iar vîrful al treilea să fie situat pe o circumferinţă dată.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1952, Kiev)

157. Bazele unui trapez sînt a şi b. Să se găsească segmentul de dreaptă care uneşte mijloacele diagonalelor lui.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1953, Kiev)

158. Să se demonstreze că într-un trapez suma unghiurilor alăturate bazei mici este mai mare decît suma unghiurilor alăturate bazei mari.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1953, Moscova)

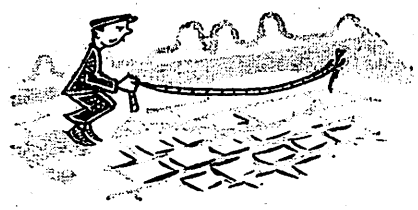
159. Într-un cerc în care diametrul $\overline{AB}$ se intersectează cu coarda $\overline{CD}$ — în punctul M — astfel ca unghiul CMB să fie de 64 grade, iar raportul dintre arcul AD şi arcul CB să

fie de 3 la 5, trasați patrulaterul $ABCD$ și aflați mărimea unghiurilor.

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VII-a)

160. Construiți un trapez isoscel cu baza mică egală cu laturile oblice și unghiurile obtuze de 120°. Găsiți baza mare presupunînd că știți cît este lungimea bazei mici.

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VII-a)



161. Ce tot măsori acolo, prietene?

— Tovarășe inginer, asta va fi sala de festivități a Palatului Cultural, nu?

— Da, asta.

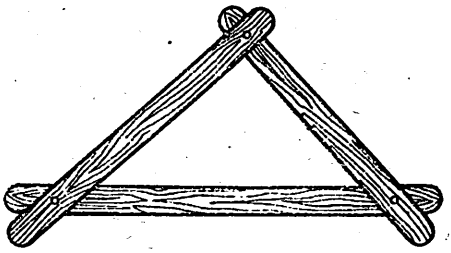
— Detașamentul nostru va da un festival cînd va fi gata palatul. Vreau să aflu cîți oaspeți vom putea chema. Știu cît loc ocupă un rînd de scaune, dar nu știu cît de lungă e sala.

— Și pentru asta stai și măsori? Uite, am aici în planurile mele cîteva cifre. Sala are forma unui dreptunghi cu lungimea de trei ori cît lățimea. De o parte și de alta a dreptunghiului, pe toată lungimea sa, sînt cîte trei semicercuri egale, pentru statuete, vase cu flori etc. Aria totală a sălii, cu cele 6 semicercuri cu tot, este de 1933,1550 mp. Acum poți să calculezi lungimea, fără să mai stai s-o măsori.

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VII-a)

162. În atelierul mecanic al unei școli, a avut loc următorul dialog între elev și maistru:

Elevul: Vă rog să-mi arătați cum se poate face o piesă formată din 3 bare de: 10 cm, 12 cm și 15 cm, ca în schița din figură. Barele să fie unite prin șuruburi A, B, C, așa fel ca $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ să se poată roti în jurul lui B ș.a.m.d.



Maistrul: Șuruburile nu au nici un rost. Mai bine nituiește sau sudează barele.

Elevul: Dar vreau ca piesa să fie deformabilă.

Maistrul: Chiar dacă le uneşti prin şuruburi, piesele tot nu vor fi mobile.

Care din ei a avut dreptate? Ce teoremă de geometrie intervine aici?

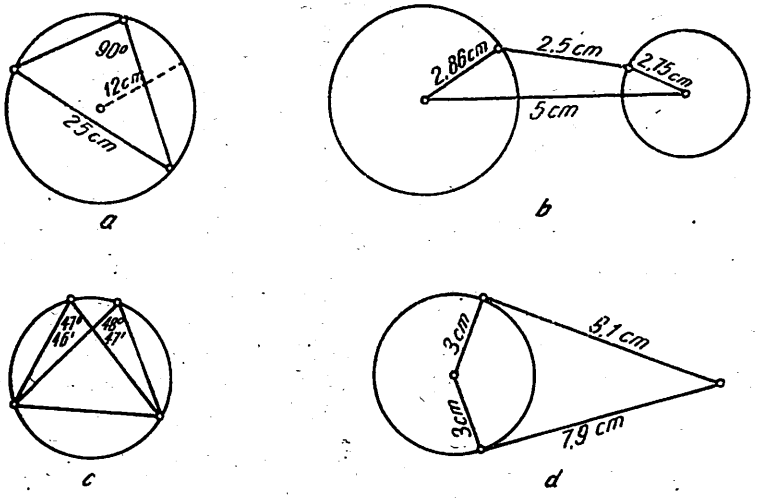
Să se pună aceeaşi problemă în cazul unui patrulater. Un patrulater format din patru bare de lungimi date şi unite aşa fel încît fiecare latură în parte să se poată roti în jurul ambelor capete este un patrulater deformabil sau ţeapăn (rigid)?

Dar dacă unim printr-o bară două vîrfuri opuse ale patrulaterului?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

163. Ce greşeală conţine fiecare din figurile următoare?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)



164. Ce poziţie are bisectoarea unghiului exterior de la vîrful unui triunghi isoscel faţă de baza triunghiului?

Dispun de o linie gradată şi de un echer. Cum pot construi cu aceste instrumente bisectoarea unui unghi dat?

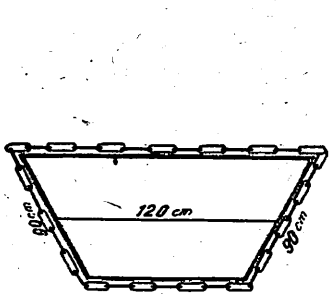
(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

165. Coşul unei căruţe are ca secţiune un trapez isoscel. Părţile laterale sînt legate printr-o bară ce uneşte mijloacele

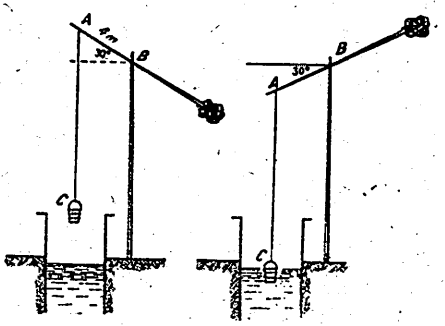
lor. Pentru a consolida coşul îl înconjurăm cu un lanţ. Dimensiunile fiind cele indicate în figura *a* de mai jos, care trebuie să fie lungimea lanţului?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

166. În figura *b* se vede o fîntînă (dimensiunile fiind date pe figură). Cînd ciutura C este la 1,50 m deasupra pămîntului, bîrna $\overline{AB}$ face cu orizontala un unghi de 30°, iar cînd ciutura



a)



b)

este la nivelul apei din fîntînă, $\overline{AB}$ face cu orizontala un unghi de 30° (în jos). Ce adîncime are fîntîna? (Adîncimea se socoteşte pînă la nivelul apei).

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

167. Laturile unui triunghi sînt $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm şi $\overline{CA} = 7$ cm. Prin vîrful A se duce cîte o paralelă la bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C şi se notează cu M şi N punctele unde aceste paralele taie prelungirile bazei. Să se afle lungimea segmentului $\overline{MN}$. Să se exprime rezultatul independent de datele numerice din problemă.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

168. Bisectoarele interioare ale unui triunghi ABC întîlnesc cercul circumscris triunghiului respectiv în punctele A_1, B_1, C_1.

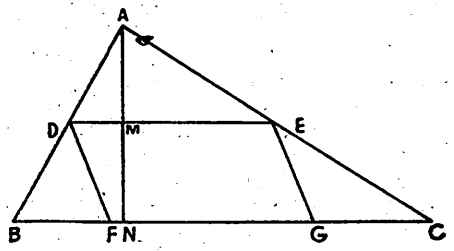
Să se demonstreze că bisectoarele triunghiului ABC se suprapun peste înălţimile triunghiului $A_1B_1C_1$. În cazul cînd $\hat{A} = 75°$, $\hat{B} = 45°$, să se calculeze unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$. Faceţi construcţiile grafice necesare, cu rigla şi compasul.

R.P.R., O.T.M., 1954, clasa a VII-a)

169. Să se arate că înălțimile și laturile oricărui triunghi care nu este dreptunghic sînt bisectoarele unui triunghi ale cărui vîrfuri sînt picioarele înălțimilor triunghiului inițial.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

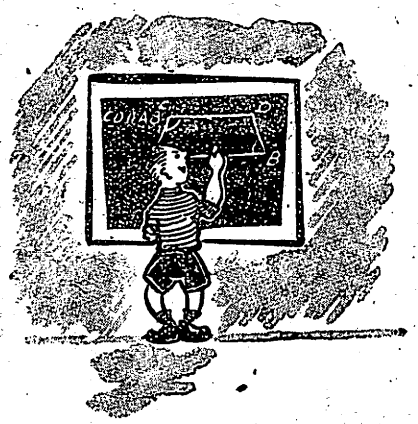
170. Fiind date unghiurile A, B, C, ale unui triunghi înscris într-un cerc, să se exprime unghiurile triunghiului ale cărui vîrfuri A', B', C', sînt punctele de intersecție ale înălțimilor triunghiului ABC cu cercul. (R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a).



171. În triunghiul din figura alăturată, D și E sînt mijloacele laturilor respective, iar DF și EG sînt paralele între ele. Să se demonstreze că aria triunghiului ADE este un sfert din aria triunghiului ABC, iar aria paralelogramului $FGED$ este jumătate din aria aceluiași triunghi ABC.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

172. Se dă o dreaptă și două puncte situate de aceeași parte a ei. Să se construiască un triunghi a cărui bază se află pe dreapta dată, iar punctele date reprezintă picioarele înălțimilor lui.



(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

173. Să se construiască trapezul $ABCD$, unde AB este paralelă cu CD, cunoscîndu-se laturile $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CD} = 10$ cm și $\overline{DA} = 4$ cm. Din A și C se duc perpendicularele $\overline{AE}$ și $\overline{CF}$ pe diagonala BD. Să se arate că $5 \cdot \overline{AE} = 3 \cdot \overline{CF}$. Faceți construcția exactă, cu rigla și compasul în creion, lăsînd să se vadă și construcțiile ajutătoare. (R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

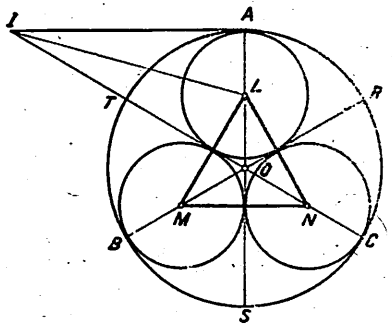
174. Se construiesc trei cercuri concentrice. Dintr-un punct oarecare al cercului celui mai mare se duc două tangente la fiecare din celelalte două cercuri. Să se arate că unghiul format de cele două tangente nu poate avea decît două valori, oriunde ar fi aşezat punctul de pe cercul cel mare din care se duc tangentele.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

175. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-se două unghiuri şi perimetrul său. Aplicaţie: $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$, şi perimetrul 9 cm.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

176. Un motiv de broderie arătă ca în figura de mai jos. El este format din 3 cercuri egale tangente două cîte două şi tangente cercului mare. Se dă cercul mare şi se cere să se construiască cele 3 cercuri mici.



(R.P.R., O.T.M. 1954, cl. a VII-a)

177. Se dau două drepte ce se intersectează şi un punct nesituat pe nici una din aceste drepte. Să se construiască un triunghi astfel încît unul din vîrfuri să coincidă cu punctul dat, iar dreptele să fie bisectoarele unghiurilor lui.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

178. Să se construiască un unghi de 52°30′ numai cu compasul şi rigla.

(U. R. S. S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Astrahan)

179. Să se înscrie într-un cerc dat un trapez, cunoscînd înălţimea şi diferenţa bazelor.

(U. R. S. S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

180. Să se arate că perpendicularele duse din vîrful unghiului drept A al unui triunghi dreptunghic ABC pe bisectoarele unghiurilor din vîrfurile B şi C sînt bisectoarele unghiurilor formate de înălţimea din A şi cele două catete.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a VII-a)

181. Să se arate că bisectoarele unghiurilor interioare ale unui paralelogram formează un dreptunghi cu diagonale egale cu diferența laturilor alăturate.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1955, Kiev)

182. Într-un triunghi oarecare ABC se duc bisectoarele interioare care taie cercul circumscris triunghiului în A_1, B_1, C_1. Să se exprime unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$ cînd se cunosc unghiurile triunghiului ABC. Caz particular: $\hat{A} = 65°30'$; $\hat{B} = 35°56'$. (R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VII-a)

183. Într-un cerc se înscrie un triunghi oarecare ABC. Perpendiculara dusă din A pe AC taie cercul în M, iar perpendiculara dusă tot din A pe AB taie cercul în punctul N. Să se demonstreze că dreptele MN și BC sînt paralele.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VII-a)

184. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara din B pe BC întîlnește pe AC în D, iar bisectoarea unghiului B taie latura AC în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B și C se taie formînd un unghi de 135° și că segmentele $\overline{BD}$ și $\overline{DE}$ sînt egale.

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a VII-a)

185. Pe laturile unui exagon regulat se construiesc triunghiuri echilaterale exterioare. Să se arate că vîrfurile lor formează un exagon regulat concentric cu primul și să se calculeze aria lui, știind că aria celui dintîi este de 31 m^2 și 24 dm^2.

(R.P.R., 1952, Anul I școli pedagogice de învățători).

186. Un pătrat $ABCD$ are latura egală cu a. Pe laturile pătratului se construiesc, în afară, triunghiuri echilaterale. Unim vîrfurile M, N, P și Q ale acestor triunghiuri. Se cere: 1) Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este un pătrat. 2) Să se calculeze volumul piramidei care are ca bază acest pătrat și înălțimea egală cu $3a(2 - \sqrt{3})$.

(R.P.R., 1952, Anul coli medii tehnice)

187. Printr-un punct P al bazei BC a unui triunghi oarecare ABC se duce o paralelă cu mediana AD a triunghiului; ea taie dreapta AB în M și dreapta AC în N.

a) Să se demonstreze relația $\overline{AM}.\overline{AC} = \overline{AN}.\overline{AB}$

b) $\overline{MP} + \overline{NP} = 2\ \overline{AD}$.

(R.P.R., 1955, Anul I școli tehnice)

188. Bazele unui trapez sînt $\overline{AB} = a$ şi $\overline{CD} = b$. Să se afle distanţa între punctele E, F care împart laturile neparalele AD, BC, ale trapezului într-un raport dat m.

$$\left(\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = m\right)$$

(Bucureşti, 1955, Anul I şcoli pedagogice)

189. Într-un cerc cu raza R sînt înscrise trei cercuri egale tangente între ele. Să se afle raza lor.

(Bucureşti, 1955, Anul II şcoli pedagogice).

190. Într-o sferă de raza R este înscris un trunchi de con circular drept. Distanţele cercurilor de bază la centrul sferei sînt respectiv $d_1 = 0{,}6\ R$ şi $d_2 = 0{,}8\ R$. În funcţie de raza R a sferei să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con.

(R.P.R., 1955, Anul III şcoli pedagogice)

191. Pe o hartă sînt marcate trei localităţi A, B, C,. Se cere :

a) să se traseze o şosea rectilinie, aşa fel ca cele trei localităţi să se găsească la aceeaşi distanţă de şosea ;

b) ce fel de triunghi trebuie să fie ABC pentru ca să putem construi pe şosea un canton egal depărtat de cele trei localităţi.

(Bucureşti, 1950, cl. a VIII-a)

192. Căsuţele A şi B sînt aşezate de o parte şi de alta a unui rîu, care are în acest loc malurile paralele drepte. Unde trebuie construită o punte peste apă care să fie perpendiculară pe maluri, pentru a obţine drumul de trecere de la A la B cel mai scurt ?

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

193. Pe laturile succesive ale unui pătrat se iau punctele M, N, P, Q în aşa fel, ca toate laturile patrulaterului $MNPQ$ să fie egale. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este un pătrat.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

194. Pe un plan sînt date două drepte care se intersectează. Să se găsească pe acest plan locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la dreptele date este egală cu un segment dat.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

195. Într-un cerc au fost duse două coarde egale $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ și o coardă oarecare $\overline{AD}$; dreapta AD taie dreapta BC în punctul E. Să se demonstreze că produsul $\overline{AE} \cdot \overline{AD}$ nu depinde de poziția punctului D pe cerc și că $\overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}^2$.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

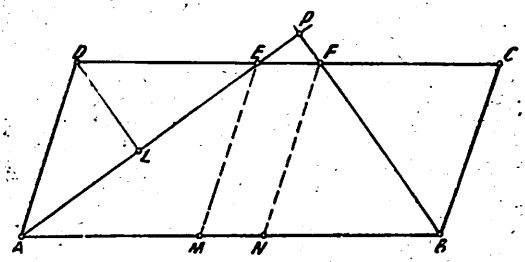
196. Mijloacele laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, precum $\overline{BC}$ și $\overline{DE}$ ale unui pentagon convex $ABCDE$ sînt unite prin segmente. Mijloacele segmentelor obținute sînt unite din nou. Să se arate că segmentul care le unește este paralel cu segmentul $\overline{AE}$ și este egal cu $\frac{1}{4}\overline{AE}$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1952, Kiev)

197. Într-un cerc sînt înscrise : un trapez a cărui bază este un diametru și un triunghi isoscel ale cărui laturi sînt paralele cu laturile trapezului. Să se arate că triunghiul și trapezul sînt echivalente.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1952, Kiev)

198. Un mecanism, ca în figura alăturată, este alcătuit din patru vergele egale două cîte două, $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{AD} =$



$= \overline{BC} = b$, care formează un patrulater articulat în cele patru vîrfuri. Vergeaua $\overline{DC}$ are două găuri E, F, unde $\overline{DE} = \overline{FC} =$

$\overline{AD}$. Două vergele mai subțiri $\overline{AE}$ și $\overline{BF}$ sînt prinse de articulațiile A și B, și trecute prin găurile E, respectiv F, așa fel încît, atunci cînd patrulaterul se deformează, ele să se poată roti în jurul punctelor A, B. Se notează cu P punctul de intersecție al acestor vergele.

1) Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ oricum l-am deforma rămîne paralelogram, iar AE, BF sînt bisectoarele unghiurilor A, B.

2) Să se demonstreze că, dacă $a = 3\,b$, triunghiurile AED și BCF se pot descompune în cîte două triunghiuri dintre care fiecare este egal cu triunghiul EFP.

3) Ce linie descrie punctul P atunci cînd deformăm paralelogramul $ABCD$, menținînd latura AB fixă?

4) Ce linii descriu în aceleași condițiuni punctele E și F? (R.P.R., 1952, cl. a VIII-a)

199. Se dă un triunghi oarecare ABC, și fie I punctul în care se întîlnesc bisectoarele sale interioare.

1) Să se demonstreze că $\widehat{BIC} = 90° + \frac{\widehat{BAC}}{2}$

2) Punctele B și C fiind fixe, să se determine locul geometric al punctului I atunci cînd punctul A se mișcă în planul triunghiului, așa fel ca unghiul A să rămînă constant.

3) Fie I' centrul cercului tangent laturii BC și prelungirilor laturilor AB, AC. Să se demonstreze că cercul care trece prin punctele B, C, I trece și prin punctul I'.

4) Cercul ce trece prin punctele B, I, C mai taie latura AB în C' și latura AC în B'. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $AB'C'$ sînt asemenea între ele.

(R.P.R., 1952, cl. a VIII-a)

200. Se dă un trapez $ABCD$ ($\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ fiind bazele) în care laturile neparalele $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$, prelungite, se taie într-un punct E formînd un unghi drept.

1) Fie M mijlocul bazei mici. Dreapta EM taie baza mare în N. Să se demonstreze că $\overline{AN} = \overline{NB}$, iar $\overline{MN}$ este egal cu semidiferența bazelor.

2) Prin M se duce cîte o paralelă la AD și BC și se notează cu P și Q punctele unde aceste paralele taie baza mare. Să se demonstreze că MN este mediană în triunghiul MPQ.

3) Să se construiască trapezul $ABCD$ cunoscînd latura $\overline{AD}$, baza mică $\overline{CD}$ și segmentul $\overline{MN}$, știind că laturile neparalele se taie sub un unghi de 90°.

(R.P.R., 1952, cl. a VIII-a)

201. Pe o dreaptă dată să se găsească un punct a cărui diferență a distanțelor la două puncte date să fie minimă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Chișinău)

202. Prin centrul de greutate al unui triunghi a fost dusă o dreaptă Δ. Să se demonstreze că distanța unuia dintre vîrfurile acestui triunghi la dreapta Δ este egală cu suma distanțelor celorlalte două vîrfuri la această dreaptă.

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

203. Se dă o dreaptă D, un cerc și un punct A care nu este așezat pe nici una din aceste linii. Să se ducă prin punctul A un segment care să aibă o extremitate pe cerc iar a doua pe dreaptă, astfel ca punctul A să fie mijlocul acestui segment.

(R.P.P., 1952 — 1953, categoria B)

204. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd înălțimea h coborîtă pe ipotenuză și raza r a cercului înscris.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Kiev)

205. Se dă un triunghi ABC și un punct O.

Se notează cu D, E, F, mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, apoi cu O_1, O_2, O_3 simetricele punctului O față de punctele D, E, F.

1) Să se demonstreze că triunghiul $O_1O_2O_3$ este egal cu triunghiul ABC.

2) În cazul particular cînd O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, ce rol joacă el în triunghiul $O_1O_2O_3$.

3) Să se demonstreze că dreptele AO_1, BO_2, CO_3 sînt concurente.

(București, 1953, cl. a VIII-a)

206. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Kiev)

207. Pe bisectoarea unui unghi drept cu vîrful în M se ia un punct A_1 și prin acest punct se duce o dreaptă care taie laturile unghiului în punctele N și P. Să se demonstreze că

suma $\frac{1}{\overline{MN}} + \frac{1}{\overline{MP}}$ are o valoare constantă, independent de modul cum dreapta NP taie cele două laturi ale unghiului drept.

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

208. În trapezul $ABCD$ se duce prin punctul S de intersecție al diagonalelor o dreaptă paralelă la bazele AB și DC ale trapezului, care taie laturile AD și BC în punctele M și N. Să se demonstreze că:

1) $\overline{MN}$ este egal cu media armonică a bazelor;

2) dacă $\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$ atunci $\overline{AC}$ este egal cu media geometrică a bazelor.

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

209. Să se demonstreze că un triunghi care are două mediane egale este isoscel.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953—1954, Ordjonikidze)

210. Să se arate că dreapta care trece prin intersecția diagonalelor și intersecția laturilor neparalele ale unui trapez împarte bazele în părți egale.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

211. Se dă un unghi al cărui vîrf este inaccesibil (se află în afara desenului) și în interiorul lui un punct M. Să se traseze prin acest punct o dreaptă care să treacă prin vîrful unghiului.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

212. Latura AD a unui paralelogram $ABCD$ este împărțită în n părți egale. Primul punct de diviziune P se unește cu vîrful B. Să se demonstreze că dreapta BP taie pe diagonala $\overline{AC}$ o parte $\overline{AQ}$ care este egală cu $\frac{1}{n+1}$ din întreaga diagonală.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Astrahan)

213. Să se construiască un triunghi cunoscînd două laturi și mediana corespunzătoare celei de a treia laturi.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953—1954, Ordjonikidze)

214. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd cele trei puncte P, Q, R unde înălțimile triunghiului intersectează cercul circumscris lui.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Astrahan).

215. Să se arate că dreapta care unește picioarele a două înălțimi ale unui triunghi ascuțitunghi taie din el un triunghi asemenea

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1955, Kiev)

216. Să se arate că locul geometric al tuturor punctelor ale căror distanță pînă la două puncte date sînt în raport constant t este un cerc (cercul lui Appolonius).

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1955, Kiev)

217. Într-un cerc sînt date două raze. Să se traseze o coardă astfel încît ea să fie împărțită de aceste raze în 3 părți egale.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956. Ordjonikidze)

218. Prin două puncte date ale unui cerc să se traseze două corzi paralele între ele, astfel încît suma lor să fie egală cu un segment dat.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956 Lwow)

219. Latura unui triunghi, egală cu 8 dm, este de două ori mai mare decît mediana lui. Unul din unghiuri dintre mediană și celelalte laturi ale triunghiului este de 30°. Să se găsească aria acestui triunghi.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956, Ordjonikidze)

220. Din trei puncte date, ca centre, să se descrie trei cercuri tangente între ele.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1946, Kiev)

221. Să se demonstreze că dreptele care unesc mijlocul înălțimii unui tetraedru regulat cu vîrfurile bazei sînt perpendiculare între ele.

(U.R.S.S., Olimpiada meatematică cl. a IX-a și a X-a, 1947, Kazan)

222. Să se secționeze un unghi tetraedric convex printr-un plan, astfel încît în secțiune să se obțină un paralelogram.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1947, Kiev)

223. Care este cel mai mare număr de unghiuri ascuțite pe care îl poate avea un poligon convex, cu n laturi?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1949, Kiev)

224. Să se găsească locul geometric al punctelor pentru care diferența distanțelor pînă la 2 drepte date este egală cu un segment de lungime dată.

(U.R.S.S. Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1950, Kiev)

225. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct în interiorul triunghiului. Dreapta dusă prin M paralelă la BC taie AB în D și AC în E; dreapta dusă prin M paralelă la CA taie BC în F și pe AB în G; iar dreapta dusă prin M paralelă la AB taie BC în H și AC în I. Să se arate că:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{HI}}{\overline{AB}} = 2$$

(București, 1950, cl. a IX-a)

226. Se dau două cercuri secante în A și B:

a) Să se construiască prin punctele A și B cîte o secantă care să fie împărțită de punctul A, respectiv B, în același raport dat $\frac{m}{n}$. Aceste secante taie cercurile respective în A_1, B_1 și A_2, B_2. Să se arate că $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel AB$.

b) Care este valoarea raportului $\frac{m}{n}$ cînd punctele A_1 și A_2 coincid?

(București, 1950, cl. a IX-a)

227. Unei sfere îi este circumscris un patrulater strîmb. Să se demonstreze că punctele de tangență se află într-un plan.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1950, Moscova)

228. Un plan este acoperit cu o rețea de pătrate cu latura 1. Se poate construi un triunghi echilateral cu vîrfurile în nodurile rețelei?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1950, Kiev)

229. Să se ducă într-un cerc, o coardă care să fie tăiată de coardele egale, date, $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ în trei părți egale.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

230. Fie triunghiul dreptunghic ABC în care C este vîrful unghiului drept, iar $\overline{CD}$ înălțimea dusă din acest punct pe ipotenuză. În fiecare din triunghiurile ABC și BCD se înscrie cîte un cerc.

Să se demonstreze că suma razelor acestor cercuri este egală cu înălțimea $\overline{CD}$.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

231. Să se demonstreze că dacă una din laturile a, b, c, ale unui triunghi este egală cu media aritmetică a celorlalte două, atunci una din înălțimile acestui triunghi este de 3 ori mai mare decît raza cercului înscris în acest triunghi.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

232. Să se demonstreze că dacă punctul S este mijlocul segmentului $\overline{AB}$, iar M este un punct oarecare al dreptei AB, atunci există relația:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2 \cdot \overline{SA}^2 + 2 \cdot \overline{SM}^2$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

233. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi oarecare s-au ales în mod corespunzător punctele D, E, F în așa fel ca:

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{CE} : \overline{EA} = \overline{AF} : \overline{FB} = k,$$

unde k este un număr pozitiv dat. Avînd dată aria S a triunghiului ABC, să se calculeze aria triunghiului DEF.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

234. Într-un cub se află două tetraedre regulate astfel încît patru vîrfuri ale cubului sînt vîrfurile unuia din ele, iar celelalte patru vîrfuri ale cubului, vîrfurile celuilalt. Ce fracțiune din volumul cubului îl formează partea comună a acestor tetraedre?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1951, Ivanovo)

235. Să se demonstreze că nu există un poliedru cu șapte muchii.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1951, Kiev)

236. Să se demonstreze că suma unghiurilor unui patrulater stîmb (neplan) este mai mică decît 360°.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a şi a X-a, 1951, Kiev)

237. Pe un segment de dreaptă dat $\overline{AB} = 2a$, se ia un punct oarecare P, se construiesc de aceeaşi parte a segmentului $\overline{AB}$ două semicercuri, unul cu diametrul $\overline{AP}$, iar celălalt cu diametrul $\overline{BP}$ şi se duce tangenta comună la aceste semicercuri.

1) Să se determine $\overline{AP} = x$ astfel ca această tangentă comună să aibă o lungime dată $\overline{MN} = l$.

2) Ce valoare maximă poate avea l pentru ca această construcţie să fie posibilă?

(R.P.R., 1952, cl. a IX-a)

238. Se dă un cerc O şi doi diametri AB, CD perpendiculari unul pe celălalt. Prin punctul A se duce o secantă AN care taie diametrul CD în M şi cercul în N.

1) Să se demonstreze că produsul $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$ este constant cînd dreapta AN se roteşte în jurul punctului A.

2) Prin punctul M, se duce o perpendiculară pe diametrul CD, care taie cercul în P. Să se demonstreze că $\overline{MA} \cdot \overline{MN} = \overline{MP}^2$.

3) Ce poziţie trebuie să ocupe coarda AN pentru ca produsul $\overline{MA} \cdot \overline{MN}$ să fie maxim?

(R.P.R., 1952, cl. a IX-a)

239. În spaţiu se dă un punct A. Să se găsească locul geometric al proiecţiilor lui pe toate dreptele situate în planul (L) şi care trec printr-un punct dat P al acestui plan.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1952, Kiev)

240. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-se mediana, înălţimea şi bisectoarea duse din acelaşi vîrf al triunghiului.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a şi a X-a, 1953, Chişinău)

241. Într-un cerc se trasează coarda $\overline{AB}$ şi diametrul $\overline{MN}$. Fie M' şi N' proiecţiile punctelor M şi N pe dreapta AB. Să se demonstreze că $\overline{M'A} = \overline{BN'}$.

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

242. Să se demonstreze că dacă există un cerc tangent la prelungirile celor patru laturi ale unui patrulater, atunci diferențele laturilor opuse ale acestui patrulater sînt egale. (R.P.P., 1952—1953, categoria B).

243. Să se demonstreze că înălțimile h_a, h_b, h_c ale unui triunghi și razele r_a, r_b, r_c ale cercurilor exînscrise satisfac egalitatea:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

244. Să se taie un cub în trei piramide egale.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1953, Moscova)

245. Să se arate că suma distanțelor de la un punct arbitrar al bazei unei piramide regulate pînă la fețele ei laterale este o mărime constantă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1953, Kiev)

246. Un segment de lungime constantă se mișcă cu extremitățile sale pe două drepte încrucișate, care formează un unghi drept. Să se găsească locul geometric al mijloacelor lor.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

247. Se dă un triunghi isoscel. Baza lui este o coardă într-un cerc tangent la laturile egale ale triunghiului. Să se determine raza cercului știind că baza triunghiului este egală cu a, iar înălțimea cu h.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1953—1954, Ordjonikidze)

248. Să se demonstreze că aria oricărui triunghi dreptunghic este egală cu produsul dintre segmentele determinate pe ipotenuză de punctul de tangență al cercului înscris.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Astrahan)

249. Să se arate că planele care trec prin muchiile unui unghi triedru și bisectoarele fețelor opuse se intersectează după o dreaptă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

250. Există în spațiu patru puncte A, B, C, D în așa fel încît $\overline{AB}=\overline{CD}=8$ cm, $\overline{AC}=\overline{BD}=10$ cm, $\overline{AD}=\overline{BC}=13$ cm?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Moscova)

251. Fie $ABCDEF$ un exagon regulat și P punctul de întîlnire al tangentelor duse la cercul său circumscris în punctele A și C.

1) Să se demonstreze că PF trece prin mijlocul laturii AB.

2) Să se arate că $\overline{PF} = R\sqrt{7}$ unde R este raza cercului circumscris. (București, 1955, cl. a IX-a)

252. Într-un triunghi echilateral cu latura a este înscris un cerc. Din unul din vîrfurile triunghiului ca centru, se construiește un alt cerc cu raza $\frac{a}{2}$. Să se găsească aria cuprinsă între aceste cercuri.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

253. Într-un triunghi echilateral ABC fiecare latură este împărțită respectiv prin punctele A_1, B_1, C_1 astfel încît $\overline{BA_1} : \overline{A_1C} = 1:2$; $\overline{CB_1} : \overline{B_1A} = 1:2$; $\overline{AC_1} : \overline{C_1B} = 1:2$. Se duc dreptele AA_1, BB_1, CC_1. Să se demonstreze că triunghiul format de intersecțiile lor are aria egală cu $\frac{1}{7}$ din aria lui ABC.

(U.R.S.S. , Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Lwow)

254. Muchia unui tetraedru regulat este a. Să se calculeze aria acelei secțiuni a tetraedrului care este un pătrat.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1946, Kiev)

255. Să se arate etapele prin care se ajunge de la volumul cubului la volumul piramidei oarecare, fără a scrie formule sau a face demonstrații. Se va indica esențialul fiecăruia din raționamentele acestor etape. (București, 1950, cl. a X-a)

256. Să se demonstreze că suma distanțelor de la un punct interior oarecare al unui tetraedru regulat pînă la fețele sale este o mărime constantă. (U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1950, Stalingrad)

257. Fiind date două plane X și Y care se intersectează și dreapta m care taie planele X și Y în M și N, să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele la dreapta m ale căror extremități sînt așezate pe planele X și Y.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

258. Se dă o dreaptă MN, un cerc O și punctele A, B pe el. Să se găsească pe cerc un punct X astfel încît dreptele AX și BX să taie pe dreapta MN un segment de lungime dată a.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1952, Kiev)

259. Se dau două segmente încrucișate. Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc fiecare punct din interiorul primului segment cu fiecare punct din interiorul celui de-al doilea segment.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. aX-a, 1952, Kiev)

260. Să se găsească locul geometric al centrului unui dreptunghi ale cărui vîrfuri sînt așezate pe perimetrul unui triunghi dat.

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

261. Prin fiecare vîrf al unui tetraedru cu volumul dat V se duce un plan paralel la fețele opuse ale tetraedrului. Să se calculeze volumul tetraedrului format de aceste plane.

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

262. Să se arate că raportul dintre volumul unei sfere și volumul trunchiului de con circumscris este egal cu raportul ariilor lor totale.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1953, Kiev)

263. Să se calculeze volumul V al unui tetraedru $ABCD$ fiind date lungimea d a muchiei $\overline{AB}$ și aria S a proiecției tetraedrului pe planul perpendicular la dreapta AB.

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

264. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-se baza a, mediana m_a și unghiul A.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

265. Într-o piramidă triunghiulară să se ducă un plan astfel încît secțiunea să fie un paralelogram.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Kiev)

266. O sferă este tangentă la toate muchiile unui cub. Să se determine volumul porțiunii de sferă cuprins în interiorul cubului, dacă muchia acestuia din urmă este egală cu a.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1955, Kiev)

267. Înălțimea, bisectoarea și mediana trasate prin vîrful A al unui triunghi ABC, împart unghiul din acest vîrf în patru părți egale. Să se demonstreze că triunghiul este dreptunghic.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

PARTEA a III—a

ALGEBRA

268. Cînd adunăm un număr de două cifre cu răsturnatul lui (de exemplu, $25 + 52$, $78 + 87$ etc.) obţinem ca rezultat, sau un număr de două cifre în care cifrele sînt egale între ele, sau un număr de trei cifre în care cifra de la mijloc este egală cu suma cifrelor extreme. Cum se explică aceasta?

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VI-a)

269. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=a$$

$$y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=b$$

$$z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=c$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a şi a VIII-a, 1951, Kiev)

270. Să se simplifice fracţia:

$$F=\frac{a+a^2+a^3+\ldots+a^m}{a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}+\ldots+a^{-m}}$$

(U.R.S.S. Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1953, Kiev)

271. Am acum de două ori mai mulţi ani decît ai avut tu cînd eu am avut atît cît ai tu acum. Acum avem amîndoi 63 ani. Cîţi ani are fiecare?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a 1953, Kiev)

272. Într-o fabrică în care energia se distribuie mașinilor cu ajutorul sistemului curelelor de transmisie, s-au primit noi mașini. Pentru punerea lor în funcțiune, un strungar primește ca sarcină să lucreze două roți de transmisie cuplate din care una să facă 210 turații pe minut, iar cealaltă, cu o circumferință cu 47,1 cm mai mare decît prima, să facă 120 turații pe minut. Ce diametru trebuie să aibă fiecare din cele două roți?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VII-a)

273. Să se rezolve sistemul:

$$E_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$$
$$E_2 = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2$$
$$E_3 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3$$
$$E_4 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4$$
$$E_5 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1953 Moscova)

274. La examenul de admitere la o școală medie tehnică, un elev a obținut media generală 4,25. Calculul mediei generale se face împărțind la 2 suma mediilor obținute la oral și la scris. Lucrarea scrisă s-a dat la matematică și limba română. Notele de la lucrările scrise diferă cu un punct. La oral, elevul a obținut la matematică o notă mai mare cu un punct decît la lucrarea scrisă, însă la oralul de la limba română a obținut o notă cu un punct mai puțin decît la lucrarea scrisă. La constituție, la oral, a luat nota 3. Ce note a luat la matematică, la scris și la oral?[1]

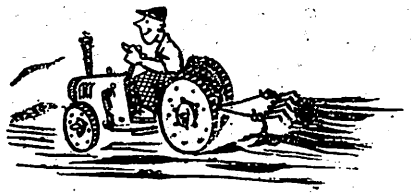
(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VII-a)

275. O brigadă de 22 tractoriști de la o stațiune de mașini și tractoare trebuie să lucreze terenul unor întovărășiri agricole.

[1] Aprecierile la învățătură sînt din perioada cînd nota minimă era 1 și cea maximă 5. (n. a.)

Printr-o mai bună organizare a muncii, fiecare tractorist depăşeşte norma zilnică cu 2 hectare şi-şi termină lucrările cu o zi mai devreme decît fusese planificat. Dacă ar continua să lucreze în acelaşi ritm şi în această zi economisită, întreaga brigadă ar realiza o depăşire a planului de lucru de $\frac{1}{5}$ din totalul lucrărilor planificate. Cîte hectare a avut de arat brigada şi în cîte zile s-a terminat de fapt munca?

(R.P.R., O.T.M., 1953, cl. a VII-a)



276. Să se arate că: $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ este un pătrat perfect.

(U. R. S. S., Olimpiada matematică, cl. a VII-a, 1954, Kiev)

277. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{2b^3-4abx-2a^2}{x^3-b^4}=\frac{a^3+x}{b^2-x}-\frac{a^3-x}{b^2+x}$$

şi să se facă proba.

(R.P.R., O.T.M., cl. a VII-a)

278. Ion şi Nicolae lucrînd împreună ar termina o lucrare în 24 ore. Nicolaie şi Dumitru ar termina aceeaşi lucrare în 24 ore şi 30 minute; iar Ion şi Dumitru ar termina aceeaşi lucrare în 21 ore. Au lucrat toţi trei împreună şi au primit suma de lei 260. Se cere să se afle în cît timp s-a efectuat lucrarea şi ce sumă se cuvine fiecăruia.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

279. Într-o împărţire, cîtul a fost 31 şi restul 11. Deîmpărţitul plus împărţitorul fac 555. Să se reconstituie împărţirea.

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

280. Grădina unei şcoli are 966 m² şi este împărţită în patru părţi, în modul următor: aria primei părţi reprezintă $\frac{2}{3}$ din aria celei de a doua; aria celei de-a treia reprezintă $\frac{8}{9}$ din aria celei de-a doua, iar aria celei de a patra reprezintă $16\frac{2}{3}\%$ din ariile primelor trei părţi luate împreună. Cîţi metri pătraţi are fiecare din cele patru părţi?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

231. Elevii a două şcoli au plecat împreună în aceeaşi tabără de vară. Acolo li s-au repartizat două clădiri. În prima clădire încăpeau de 3 ori mai mulţi copii decît în cea de-a doua. După un timp, 20 copii din prima clădire au fost mutaţi în cea de-a doua şi atunci numărul copiilor din clădirea a doua a devenit egal cu $\frac{5}{7}$ din numărul copiilor care au rămas în prima clădire. Cîţi copii au fost la început în fiecare clădire?

(R.P.R., O.T.M., 1954, cl. a VII-a)

232. Să se arate că:

$$(bx + cz)(ay^2 + 2byt + ct^2) - y(b^2 - ac)(xt - yz) = \\ = (by + ct)\,[axy + b(xt + yz) + czt].$$

(R.P.R., O.T.M., 1955 cl. a VII-a)

233. Greutatea unei bîrne de brad este de $27\frac{4}{5}$ kg, iar a unei bîrne de stejar este 45,5 kg. Dacă 10 bîrne au greutatea de 384,20 kg, să se afle cîte bîrne sînt de brad şi cîte de stejar? Se va da soluţia aritmetică şi apoi soluţia algebrică.

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a VII-a)

234. Situaţia la învăţătură a unei clase se prezintă astfel: a treia parte din numărul elevilor promovaţi întrece cu 4 numărul elevilor corigenţi şi repetenţi consideraţi laolaltă, iar numărul elevilor repetenţi este cu unu mai mic decît numărul elevilor corigenţi. Dacă la numărul total al elevilor clasei ar fi unul mai mult, atunci numărul acesta este de 11 ori mai mare decît numărul corigenţilor. Să se afle numărul elevilor promovaţi, corigenţi şi repetenţi. (R. P. R., O.T.M., 1955, cl. a VII-a)

235. Un număr împărţit la 7 dă restul 6, iar împărţit la 4 dă restul 1. Ce rest va da numărul prin împărţire la 28?

(R.P.R., O.T.M., 1955, cl. a VII-a)

236. Un număr de două cifre ab adunat cu dublul răsturnatului său (adică de două ori numărul ba) dă 111. Să se afle numărul.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VII-a)

287. O piesă metalică făcută dintr-un aliaj de alamă (zinc şi cupru) cîntăreşte 490 gr. Cufundată în apă ea pierde 70 gr. Cîte grame de cupru cu densitatea 9 şi cît zinc cu densitatea 5 conţine piesa?

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VII-a)

288. O sumă care constituie fondul unei clase, la finele anului trebuie împărţită în părţi egale elevilor clasei respective. Dacă ar fi fost 4 elevi mai mult, partea fiecăruia ar fi fost cu 2 lei mai mică; iar dacă ar fi fost 3 elevi mai puţin, partea fiecăruia ar fi fost cu 2 lei mai mare. Să se afle suma şi numărul elevilor din clasă.

(R.P.R., O.T.M., 1956, cl. a VII-a)

289. Se dă: $y = \frac{b - ax}{a - bx}$. Să se arate că $x = \frac{b - ay}{a - by}$.

Să se arate că $a(x + y) = b(1 + xy)$

(R.P.R., O.T.M., 1957, cl. a VII-a)

290. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{16},$$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{7}{48}$$

şi să se verifice rezultatul.

(Bucureşti, 1955, Anul I şcoli tehnice)

291. Pe laturile a, b, c ale unui triunghi ABC se construiesc 3 dreptunghiuri asemenea.

Să se afle înălţimile acestor dreptunghiuri dacă aria dreptunghiului construit pe latura a ca bază întrece cu k^2 suma ariilor celorlalte 2 dreptunghiuri. Discuţia soluţiilor.

(Iaşi, 1955, Anul I şcoli tehnice)

292. Să se rezolve ecuaţia: $x^3 - x + a = 0$, ştiind că raportul rădăcinilor este a.

(R.P.R., 1955, Anul I şcoli tehnice)

293. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$x + xy + y = 17$$
$$x^2 + x^2y^2 + y^2 = 129$$

(R.P.R., 1955, Anul I școli tehnice)

294. Să se rezolve sistemul :

$$x + \sqrt{y} = 13$$
$$2 \log x + \log y = 3.$$

(R.P.R., 1956, Anul I școli de maiștri)

295. În ce caz ecuația de gradul II

$$x^2 + px + q = 0$$

are drept coeficienți dublul pătratelor rădăcinilor. Să se găsească toate ecuațiile care satisfac această condiție.

(R.P.R., 1956, Anul I școli pedagogice)

296. Un rezervor are forma unui paralelipiped dreptunghic. Știind că : una din cele trei dimensiuni este egală cu semisuma celorlalte două ; că suma celor trei dimensiuni este 18 m, și că suprafața totală este 208 m^2, să se calculeze capacitatea în hl a rezervorului.

(București, 1953, Anul II școli pedagogice)

297. Să se arate că dacă un număr este suma a două pătrate, dublul său și pătratul său sînt de asemenea sume de două pătrate.

(Iași, 1955, Anul III școli pedagogice)

298. Doi călători merg pe același drum și pornesc în același timp, mergînd unul din localitatea A spre B, celălalt din B spre A și se întîlnesc într-o localitate C. În momentul întîlnirii primul făcuse 20 km mai mult decît al doilea. Păstrînd vitezele cu care a mers fiecare înainte, primul sosește în localitatea B după $\frac{14}{3}$ ore de la întîlnire, iar al doilea după $\frac{54}{7}$ ore de la întîlnire.

Să se afle distanța dintre cele două localități.

(R.P.R., 1956, Anul III școli pedagogice)

299. Să se descompună în factori : $a^{10} + a^5 + 1$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1946, Lwow)

300. Să se rezolve ecuația : $3x^2 - 7x + 2 = 0$, fără a aplica formula cunoscută.

(București, 1950, cl. a VIII-a)

301. Să se descompună în factori : $x^5 + x + 1$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1951, Leningrad)

302. Să se demonstreze că dacă :

$$a(y + z) = x,\ b(z + x) = y,\ c(x + y) = z$$

și cel puțin unul din numerele x, y, z nu este egal cu zero. atunci avem egalitatea :

$$ab + bc + ca + 2abc - 1 = 0$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

303. Să se arate că expresia :

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)^3(c-b)}$$

în care numerele : a, b, c sînt toate diferite, este egală cu : $a + b + c$.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

304. Din trei fracții inegale, cu numitorul pozitiv, s-a format o fracție nouă al cărei numărător este suma numărătorilor, iar numitorul suma numitorilor fracțiilor date. Să se demonstreze că această fracție este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare din fracțiile date.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

305. Să se arate că dacă numerele : a, b, c, d sînt pozitive, și $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, atunci :

$$E = \sqrt{\frac{a^5 + b^2c^2d + a^3c^2}{d^5 + b^2cd^2 + b^4c}} = \frac{a}{d}.$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

306. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$xy = ax + by,$$
$$yz = ay + bz,$$
$$zx = az + bx.$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

307. Să se descompună în factori liniari:

$$E = bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b)$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Chișinău)

308. Să se descompună în factori expresia:

$$E(a, b, c) = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

309. Să se descompună în factori expresia:

$$E = a^4 (b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2).$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

310. Să se demonstreze că dacă numerele pozitive: a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, satisfac egalitatea:

$$\sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)\ (a_2 + b_2 + c_2)} = \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2},$$ atunci:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

311. Să se găsească suma:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Kiev)

312. Să se demonstreze că dacă a și b sînt catetele unui triunghi dreptunghic, c ipotenuza acestuia, iar n este un număr natural mai mare decît 2, atunci:

$$a^n + b^n < c^n.$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

313. Să se verifice inegalitatea

$$E = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}.$$

(de n ori; de $n-1$ ori)

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Moscova)

314. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

315. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x_1x_2 = 1,\ x_2x_3 = 2,\ x_3x_4 = 3,\ x_4x_5 = 4,$$
$$x_5x_6 = 5,\ x_6x_7 = 6,\ x_7x_1 = 7.$$

(R.P.P., 1952 —1953, categoria B)

316. Să se dovedească că dacă rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ sînt reale, atunci rădăcinile ecuației: $x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$ vor fi de asemeni reale, oricare ar fi numărul real a.

(U.R.S.S. Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1953, Chișinău)

317. Să se verifice că ecuația:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

unde a, b, c sînt numere reale date, are rădăcini reale.

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

318. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației:

$$(p^2 - a^2)x^2 - 2pqx + q^2 - b^2 = 0,$$

să se calculeze expresia:

$$E = (a^2x_1^2 + b^2)(a^2x_2^2 + b^2).$$

Să se arate că expresia E care depinde de a, b, p și q este un pătrat perfect.

(București, 1953, cl. a VIII-a)

319. O ecuație de gradul al doilea are rădăcinile :

$$x_1 = \frac{m+1}{2m+3+\sqrt{3m^2+10m+8}},$$

$$x_2 = \frac{2m+3+\sqrt{3m^2+10m+8}}{m+1}.$$

Se cere :

a) Să se formeze această ecuație.

b) Să se determine parametrul m astfel ca între rădăcinile ecuației să existe relația :

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4}$$

c) Să se cerceteze și să se explice particularitățile ecuațiilor obținute, înlocuind pe m cu valorile aflate la punctul b.

d) Să se reprezinte grafic trinoamele care formează cele două ecuații, arătîndu-se și aici particularitățile.

(Timișoara, 1953, cl. a VIII-a)

320. Să se găsească toate soluțiile sistemelor de ecuații :

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)=0$$

unde : $n = 1,2,3,4\ldots$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Moscova)

321. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned}
E_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = 6\\
E_2 &= x_2 + x_3 + x_4 = 9\\
E_3 &= x_3 + x_4 + x_5 = 3\\
E_4 &= x_4 + x_5 + x_6 = -3\\
E_5 &= x_5 + x_6 + x_7 = -9\\
E_6 &= x_6 + x_7 + x_8 = -6\\
E_7 &= x_7 + x_8 + x_1 = -2\\
E_8 &= x_8 + x_1 + x_2 = 2.
\end{aligned}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Astrahan)

322. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2 = a + (y - z)^2,$$
$$y^2 = b + (z - x)^2,$$
$$z^2 = c + (x - y)^2.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

323. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$E_1 = x^2 + xy + xz = 6,$$
$$E_2 = y^2 + xy + yz = 12,$$
$$E_3 = z^2 + xz + yz = 18.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Ordjonikidze)

324. Ce valori trebuie să aibă p și q, pentru ca ecuația

$$x^2 + px + q = 0$$

să aibă ca rădăcini numerele p și q?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Ordjonikidze)

325. Perimetrul unui romb are $2p$ cm, iar suma diagonalelor lui este de m cm. Să se găsească aria rombului.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

326. Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^4 + 16x^2 + 4}{(x - \sqrt{5} + \sqrt{3})\ (x + \sqrt{5} - \sqrt{3})},$$

apoi rezultatul să fie pus sub forma unui produs de factori de gradul I.

(R.P.R., 1955, cl. a VIII-a)

327. Să se rezolve sistemul:

$$yz = ax,$$
$$zx = by,$$
$$xy = cz.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1955, Kiev)

328. Se dă ecuația:

$$\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a}}}} = \lambda \sqrt{a}.$$

Să se determine λ astfel ca suma inverselor rădăcinilor adunată cu inversul sumei lor să dea $\frac{1}{a}$.

(R.P.R., 1955, cl. a VIII-a)

329. Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$. Se cere să se formeze ecuația care dă rădăcinile:

$$X_1 = \frac{x_1}{x_2^2}\ ;\ X_2 = \frac{x_2}{x_1^2}.$$

Să se arate că discriminantul (realizantul) ecuației obținute este divizibil cu discriminantul ecuației date.

(București, 1955, cl. a VIII-a)

330. În planul unui cerc de rază R se ia un punct A la distanța d de centru. Prin A se duce o secantă, astfel că cercul determină pe secantă o coardă de lungime $2a$. Care sînt lungimile segmentelor secantei? Discuție.

(Iași, 1955, cl. a VIII-a)

331. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = b.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956, Ordjonikidze)

332. Pentru ce valori p și q, rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ vor verifica sistemul de ecuații:

$$x_1 - 2x_2 = 2,$$
$$2x_1 - 3x_2 = 5?$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956, Ordjonikidze)

333. Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$. Să se găsească p, q și rădăcinile x_1, x_2, dacă $x_1 + 1$ și $x_2 + 1$ sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - px + pq = 0$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, 1956, cl. a VIII-a, Ordjonikidze)

334. Să se găsească rădăcinile reale ale sistemului de ecuații:

$$x^3 + 2x^2y - y^3 + 44 = 0$$
$$2y^3 + 3xy^2 + x^2y + 20 = 0$$

(R.P.R., 1956, cl. a VIII-a)

335. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$x\,(x+1)\,(3x+5y) = 144,$$
$$x^2 + 4x + 5y = 24.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1946, Kiev)

336. Două progresii : una aritmetică și alta geometrică, au cîte trei termeni, primul și ultimul termen al primei progresii sînt respectiv egal cu primul și ultimul termen al progresiei geometrice. Pentru care progresie suma termenilor este mai mare ?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1946, Kiev)

337. Să se arate că dacă :

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{A+B+C}$$

atunci :

$$\frac{1}{A^n} + \frac{1}{B^n} + \frac{1}{C^n} = \frac{1}{A^n + B^n + C^n},$$

pentru orice n impar.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1947, Kiev)

338. Să se găsească soluțiile întregi ale ecuației :

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1947, Kiev)

339. Să se demonstreze că $(a+b)^4 \leqslant 8\,(a^4 + b^4)$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1948, Kiev)

340. Să se rezolve sistemul :

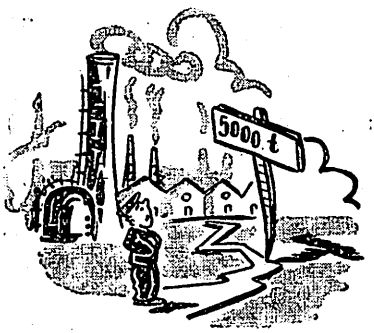
$$\frac{x_2 x_3 x_4 \ldots x_n}{x_1} = a_1,$$
$$\frac{x_1 x_3 x_4 \ldots x_n}{x_2} = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1949, Kiev)

341. Să se demonstreze că : $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)^2 \leqslant m\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_m^2)$, unde $a_1, a_2, a_3 \ldots a_m$ sînt numere reale arbitrare.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a şi a X-a, 1949, Kiev)

342. O întreprindere siderurgică a produs în cursul anului 1949 o cantitate de 5000 tone oţel. Întreprinderea îşi propune ca în fiecare an să mărească producţia cu 20% faţă de anul precedent. În cît timp, socotind de la 1 ianuarie 1949, va totaliza întreprinderea o producţie de 50 000 tone oţel?



(Bucureşti, 1950, cl. a IX-a)

343. Se consideră $\log_7 5$ şi $\log_{12} 5$. Care din aceste numere este mai mare?

Să se afle $\log_{\sqrt{3}} 9$.

(Bucureşti, 1950, cl. a IX-a)

344. Să se demonstreze că dacă suma numerelor pozitive a, b, c este egală cu 1 atunci :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

345. Să se arate că dacă :

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

atunci există inegalitatea :

$$ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ca\,(c + a) \geqslant 6\ abc.$$

(R.P.P., 1950—1951 , categoria A)

346. Să se găsească condiţia pe care ar trebui să o satisfacă coeficienţii trinoamelor $x^2 + mx + n$ şi $x^2 + px + q$ pentru ca între două rădăcini a fiecăruia dintre aceste trinoame să se găsească o rădăcină a celui de-al doilea trinom. Numerele m, n, p, q sînt numere reale.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

347. Să se demonstreze că ecuația :

$$\frac{m^2}{a-x} + \frac{n^2}{b-x} = 1,$$

unde $m \neq 0$, $n \neq 0$, $a \neq b$ are rădăcini reale. Se menționează că m, n, a, b sînt numere reale.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

348. Să se demonstreze că dacă ecuațiile :

$$x^2 + mx + n = 0 \text{ și } x^2 + px + q = 0$$

au o rădăcină comună, atunci între coeficienții acestor ecuații există relația :

$$(n-q)^2 - (m-p)(np-mq) = 0$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

349. Să se găsească suma :

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n},$$

unde numerele $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ constituie o progresie aritmetică.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1952, Kiev)

350. Să se dovedească că un polinom de forma $x^{200}y^{200} + 1$ nu poate fi descompus într-un produs de polinoame, unul numai în x și celălalt numai în y.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1953, Moscova)

351. Se știe că între numerele a, b, c există relația :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

Să se demonstreze că în acest caz oricare două dintre aceste numere sînt neapărat egale în valoare absolută și de semne contrarii.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1953, Chișinău)

352. Să se demonstreze că dacă a, b, c, d sînt numere întregi pozitive toate diferite între ele, atunci $a + b + c + d < abcd$.

Să se verifice dacă această teoremă este adevărată: 1) pentru două numere; 2) pentru trei numere; 3) pentru mai mult decît patru numere.

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

353. Să se demonstreze că pentru numerele arbitrare a, b, c, x, y, z există inegalitatea:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (ax + by + cz)^2.$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

354. Să se rezolve ecuația: $(5 - x)^4 + (x - 2)^4 = 17$ și în cazul general $(a - x)^4 + (x - b)^4 = c$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1953, Chișinău)

355. Să se demonstreze că dacă numerele a^2, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică, atunci numerele

$$\frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}$$

sînt de asemeni în progresie aritmetică.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1953, Chișinău)

356. Să se determine suma:

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots\ldots + nq^{n-1}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1953, Chișinău)

357. Să se rezolve sistemul:

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2,$$

$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2,$$

$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1953, Chișinău)

358. Să se găsească intervalul în care funcția:

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$$

este constantă.

(R.P.P., 1952—1953, categoria B)

359. Pentru a ridica nivelul de trai al oamenilor muncii, se face o reducere generală de prețuri de $x\%$. La aceeași dată se schimbă unui muncitor încadrarea, ridicîndu-i-se salariul cu $x\%$. Acum acest muncitor poate cumpăra cu salariul lui o cantitate de bunuri egală cu $1\frac{1}{2}$ din ceea ce putea cumpăra înainte. Să se afle x. Generalizare.

(București, 1953, cl. a IX-a)

360. Avem două numere. Dacă din fiecare scădem o jumătate din valoarea celui mai mic, restul obținut de la cel mai mare va fi de trei ori mai mare decît restul obținut de la cel mai mic. De cîte ori numărul mai mare este mai mare decît cel mic?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

361. Să se demonstreze că dacă:

$$x_0^4 + a_1 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0 + a_4 = 0,$$

$$4\,x_0^3 + 3a_1 x_0^2 + 2a_2 x_0 + a_3 = 0,$$

atunci $P(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ se divide prin $(x - x_0)^2$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Moscova)

362. Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{1}{1 - \sqrt[n]{a}}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

363. Se dau progresiile aritmetice:

$$1, 5, 9, 13 \ldots$$

$$4, 15, 26, 37 \ldots$$

Să se găsească termenii comuni ai acestor progresii și să se arate că acești termeni comuni formează o nouă progresie.

(R.P.R., 1954, cl. a IX-a)

364. Într-o progresie geometrică se dau: $a_{m+n} = A$ și $a_{m-n} = B$. Să se găsească a_m și a_n.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

365. Să se demonstreze că dacă trei termeni oarecare ai unei progresii (aritmetice sau geometrice) alcătuiesc o altă progresie (aritmetică sau geometrică), atunci indicii termenilor consideraţi sînt în progresie aritmetică. Să se demonstreze că şi teorema reciprocă e valabilă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

366. Fie S_m suma primilor m termeni ai unei progresii aritmetice. Să se arate că:

$$S_{3m} = 3(S_{2m} - S_m).$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

367. Să se demonstreze că:

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c N ,$$

unde $\log_a x$ este logaritmul lui x în baza a (indicii arată baza sistemului de logaritmi).

(R.P.R., 1954, cl. a IX-a)

368. Să se scrie sub o formă mai simplă expresia: $E = b^{\frac{\log(\log b)}{\log b}}$, dacă toţi logaritmii au baza egală cu acelaşi număr a.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

369. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

370. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$xy = a^2 ,$$

$$\log^2 x + \log^2 y = \frac{5}{2} \log a^2.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

371. Să se calculeze suma :

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{98.99.100}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matemàtică, cl. a IX, 1954, Astrahan)

372. Să se verifice inegalitatea :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \text{ pentru } n > 1.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

373. Se dau 100 numere $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{100}$, care satisfac condiţiile :

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 \geqslant 0$$
$$a_2 - 3a_3 + 2a_4 \geqslant 0$$
$$a_3 - 3a_4 + 2a_5 \geqslant 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 \geqslant 0$$
$$a_{100} - 3a_1 + 2a_2 \geqslant 0$$

Să se demonstreze că toate numerele a_i sînt egale între ele.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Moscova)

374. Să se găsească două progresii, una aritmetică şi una geometrică, fiecare din cîte patru termeni, aşa încît adunînd termenii de acelaşi rang din cele două progresii, să obţinem drept sumă respectiv numerele 18, 18, 26, 58.

(R.P.R., 1955, cl. a IX-a)

375. Să se rezolve ecuaţia :

$$6^x + 4^x = 9^x$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1955, Kiev)

376. a) Să se determine valoarea lui x, știind că $\log_4 (\log_x 16) = 2$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2 + y^2 + 2x = 9,$$

$$y(x + 1) = 3.$$

(București, 1955, cl. a IX-a)

377. Numerele a, b, c formează o progresie aritmetică. Să se demonstreze că expresiile $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$ și $a^2 + ab + b^2$ formează de asemenea o progresie aritmetică.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

378. Câți termeni identici există în următoarele două progresii aritmetice: 2, 7, 12, 17... și 2, 5, 8, 11..., dacă fiecare din ele constă din 121 termeni?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Lwow)

379. Să se calculeze fără tabele: $\log 2$ și $\log 5$, știind că

$$\log 2 \cdot \log 5 = 0{,}2104.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

380. Adunînd suma, diferența, produsul și cîtul a două numere întregi obținem 450. Să se găsească aceste numere.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1946, Kiev)

381. Să se rezolve ecuația:

$$\log_3 x + \log_x 3 - 2 \log_3 x \log_x 3 = \frac{1}{2}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1946, Kiev)

382. Să se determine p și q astfel ca trinomul $x^4 + px^2 + q$ să fie divizibil prin trinomul dat $x^2 + ax + b$.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

383. Pentru ce valoare a parametrului m suma pătratelor rădăcinilor ecuației:

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$$

are cea mai mică valoare?

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

384. Să se determine coeficienții ecuației $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ în așa fel încît rădăcinile acesteia să fie numerele a, b, c.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

385. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$xy(x+y) = 30,$$

$$x^3 + y^3 = 35.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1951, Leningrad)

386. Să se arate că numărul complex $a + ib$ ($i = \sqrt{-1}$, a și b reali), al cărui modul este egal cu unitatea, iar $b \neq 0$, poate fi pus sub forma:

$$a + ib = \frac{c+i}{c-i},$$

unde c este un număr real.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Moscova)

387. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x_1x_2 = 1,\ x_2x_3 = 2,\ x_3x_4 = 3,\ x_4x_5 = 4$$

$$x_5x_6 = 5,\ x_6x_7 = 6,\ x_7x_8 = 7 \ldots\ x_nx_1 = n.$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

388. Se dă ecuația:

$$mx^2 - (m-4)x + 3m - 11 = 0$$

unde m este număr întreg. Să se determine m și să se rezolve ecuația știind că ea are o singură rădăcină cuprinsă între 0 și 1.

(București, 1953, cl. a X-a)

389. Să se demonstreze că ecuația:

$$(x-a)(x-c)+2(x-b)(x-d)=0$$

în care: $a<b<c<d$, are două rădăcini reale.
(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

390. Să se găsească rădăcinile ecuației:

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. X-a, 1953, Moscova)

391. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural atunci există egalitatea:

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1},$$

unde m este număr natural.
(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

392. Să se demonstreze că atunci cînd n este un număr întreg mai mare decît 2, atunci:

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

393. Să se demonstreze că dacă: $a<b<c<d$ atunci:

$$(a+b+c+d)^2>8(ac+bd).$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

394. Trei numere necunoscute: x, y, z verifică următoarele ecuații:

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2,$$
$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}.$$

Să se determine mărimea: $x^3+y^3+z^3$.
(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Kiev)

395. Să se calculeze suma:

$$S=\frac{3}{1.4}+\frac{3}{4.7}+\frac{3}{7.10}+\frac{3}{10.13}+\ldots+\frac{3}{94.97}+\frac{3}{97.100}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

396. Să se demonstreze că fiind date numerele pozitive, a, b, c care satisfac condiția:

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a,$$

are loc egalitatea $a^2 + b^2 = c^2$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

397. Să se demonstreze că dacă: $a > 0$, $b > 0$ și $a \neq b$

$$\log_2 (a + b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Astrahan)

398. Se dau 100 numere $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{100}$ care satisfac condițiile:

$$\begin{aligned}
a_1 - 4a_2 + 3a_3 &\geqslant 0,\\
a_2 - 4a_3 + 3a_4 &\geqslant 0,\\
a_3 - 4a_4 + 3a_5 &\geqslant 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 &\geqslant 0\\
a_{100} - 4a_1 + 3a_2 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Se știe că $a_1 = 1$, să se determine $a_2, a_3 \ldots\ldots a_{100}$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Moscova)

399. Să se demonstreze că:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots\ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n,$$

dacă pentru orice $i (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ avem:

$$a_i > 0 \text{ și } a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n = 1.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Kiev)

400. În vîrful B al unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului. Se consideră pe ea punctul M depărtat cu 9 cm de plan și cu 15 cm de ipotenuza triunghiului. Știind că perimetrul triunghiului este de 60 cm, să se afle laturile lui.

(Iași, 1955, cl. a X-a)

401. Trinomul de gradul al doilea $ax^2 + bx + c$ ia pentru: $x = 1; 2; 3$ respectiv valorile $0; 1$ şi 4. Să se demonstreze că pentru $x = n$ valoarea trinomului este egală cu $(n-1)^2$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

402. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x - 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

403. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$(x + y + z)(ax + y + z) = k^2,$$
$$(x + y + z)(x + ay + z) = l^2,$$
$$(x + y + z)(x + y + az) = m^2.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

404. Se dă ecuaţia $x^2 + px + q = 0$ în care $q > 0$. Să se scrie ecuaţia de gradul doi pentru care o rădăcină să fie media aritmetică, iar cealaltă medie geometrică a valorilor inverse ale rădăcinilor ecuaţiei date.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

405. Să se rezolve ecuaţia:

$$4x^4 - 8x^3 + ax^2 + 27x + 18 = 0$$

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu 1 şi egală cu suma celorlalte două rădăcini.

(R.P.R., 1956, cl. a X-a)

406. Să se rezolve ecuaţia:

$$4^x - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a 1956, Lwow)

PARTEA a IV-a

PROBLEME DIVERSE ŞI TRIGONOMETRIE

407. Pe o balanţă cu braţele neegale, un corp pus în platanul A este echilibrat de greutăţi de 3,5 kg puse în platanul B. Acelaşi corp fiind pus în platanul B este echilibrat de greutăţi de 4,5 kg puse în platanul A.

Un cumpărător a acceptat să cumpere marfă cîntărită cu această balanţă, însă să i se cîntărească cu 2 kg aşezînd marfa în platanul A şi cu alte 2 kg aşezînd marfa în platanul B.

Să se afle greutatea totală a mărfii cumpărate.

(R.P.R., 1956, şcoli profesionale)

408. Se dă un paralelogram $ABCD$ cu laturile $\overline{AB} = 7{,}5$ cm şi $\overline{AD} = 2{,}5$ cm.

1) Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor A şi B împart latura $\overline{CD}$ în 3 părţi egale.

2) Să se determine unghiul format de aceste bisectoare.

3) Să se afle cu cît trebuie mărite laturile $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$ pentru ca bisectoarele să se întîlnească pe latura $\overline{CD}$ a paralelogramului.

(R.P.R., 1952, Anul I şcoli medii tehnice cu caracter social, cultural şi agrosilvic)

409. În interiorul unui unghi xOy de 60° se află un punct A. Se cere :

a) Să se construiască un cerc tangent la laturile unghiului xOy şi care să treacă prin punctul A.

b) Cîte soluţii admite problema ?

c) Ştiind că raza cercului construit este r, să se calculeze aria figurii mărginită de laturile unghiului şi dintre cel mai mic dintre arcele cercului cuprins între punctele de tangenţă.

(R.P.R., 1954, Anul I şcoli medii tehnice).

410. Se dă funcţia :

$$y = \frac{-\sin^2 2x}{4}\left(\frac{1}{\cos^4 2x} + \frac{1}{\cos^2 2x}\right) + \operatorname{arc\ tg}\frac{2x}{1-x^2} + 2\operatorname{arc\ cotg}\ x.$$

Se cere să se calculeze derivata.

(R.P.R., 1956, Anul I şcoli de maiştri)

411. a) Să se arate că $b^2 - 4ac$ este un pătrat perfect dacă $4a - 2b + c = 0$ sau dacă $2a + \sqrt{2}\,b + c = 0$

b) Să se calculeze raza cercului circumscris şi raza cercului înscris triunghiului de laturi 5 ; 7 şi 9 metri.

(R.P.R., 1956, Anul I şcoli de maiştri).

412. O faşă de tifon este înfăşurată pe un beţişor rotund. Beţişorul are un diametru de 1 cm, iar tifonul are o grosime de 0,5 mm. Să se afle lungimea unei feşe care este înfăşurată de 100 ori pe beţişor.

Notă. Se va considera că faşa formează un şir de cercuri concentrice cu raza din ce în ce mai mare.

(R.P.R., 1952, Anul II şcoli medii tehnice, sociale, culturale şi agrosilvice)

413. Un canal de alimentare al unei instalaţii hidraulice are lăţimea bazei de 2 m, pereţii laterali înclinaţi cu 60° faţă de orizontală, iar apa are o adîncime de 1,50 m. Să se afle :

1) Debitul canalului în m^3/oră, dacă apa curge cu 2 m/sec.

2) Aria cimentată a pereţilor şi fundului canalului, lungimea canalului fiind de 1 km.

(R.P.R., 1952, Anul II şcoli medii tehnice, sociale, culturale, şi agrosilvice)

414. În raport cu două axe dreptunghiulare : Ox, Oy, se dau două puncte $A(1;5)$, $B(13;3)$. Axa Ox reprezintă o cale ferată, iar A și B reprezintă două sate. Într-un punct M al acestei căi ferate trebuie făcută o gară.

1) Să se determine coordonatele punctului M astfel încît el să fie egal depărtat de cele două sate.

2) Satele A și B se unesc cu gara prin cîte o șosea. Să se determine unghiul AMB format din aceste șosele.

(R.P.R., 1952, Anul II școli medii tehnice)

415. O uzină are nevoie de un rezervor în formă de prismă dreaptă cu muchiile laterale de 4 m. Baza acestui rezervor este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, a cărui înălțime este de 5 m. Se întreabă :

a) Cîți litri de combustibil va cuprinde rezervorul ?

b) Cîtă tablă este necesară pentru construirea rezervorului fără capac, dacă trapezul de bază are punctul de intersecție al diagonalelor situat la 3/5 din înălțimea acestui trapez și dacă 3% din tabla consumată se pierde la încheieturi și în deșeuri ?

(R.P.R., 1954, Anul II școli tehnice)

416. O placă metalică patrulateră $OABC$ are latura $\overline{OA}$ de 4 cm și $\overline{OC}$ de 5 cm. Unghiul O este drept, unghiul B este de 45°, iar depărtarea $\overline{BI}$ a punctului B de dreapta OA este de două ori mai mare decît lungimea segmentului $\overline{AI}$. Se cere să se calculeze aria acestei plăci.

(R.P.R., 1954, Anul II școli tehnice)

417. a) Să se rezolve ecuația :

$$4 \cos (x - 30°) \cos (x - 45°) = \sqrt{2}.$$

b) Să se determine progresia aritmetică în care cunoaștem ultimul termen egal cu 189, rația egală cu 7 și suma egală cu 2 646.

(R.P.R., 1955, Anul II școli tehnice)

418. Un fir flexibil și inextensibil de greutate neglijabilă este fixat cu un capăt în B, iar la o distanță $\overline{BA} = \sqrt{2}$ metri este legată o greutate $P = 3$ kg. Firul trece apoi peste un mic scripete C situat pe orizontala punctului B la distanța $\overline{BC} = \sqrt{3}$ metri. Frecarea în scripete fiind neglijabilă, ce greutate G trebuie să suporte capătul liber al firului pentru ca unghiul A să fie de 60° (fără tabele) ?

(R.P.R., 1955, Anul II școli tehnice)

419. Se dă un triunghi dreptunghic ABC (unghiul drept în A). Proiecția catetei $\overline{AB}$ pe ipotenuză este de 4 m, iar proiecția catetei $\overline{AC}$ este cu 3 m mai lungă decît înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

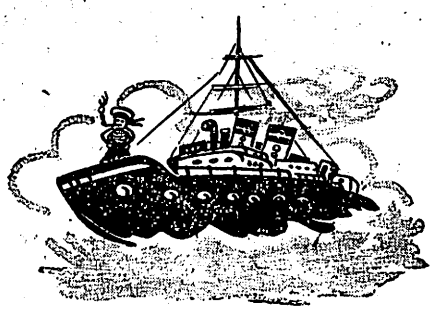
Se cere:

1) Să se afle înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

2) Să se formeze ecuația de gr. II ale cărei rădăcini să fie egale cu măsurile celor 2 catete.

(București, 1953, Anul I școli pedagogice)

420. Un vapor a mers pe un rîu în sus și în jos, parcurgînd 375 km în 13 ore. Mergînd în sus pe rîu, în fiecare 4 ore, el a parcurs 100 km, iar în jos pe rîu, în fiecare 2 ore el a parcurs 70 km. Cîte ore a mers în sus pe rîu și cîte ore a mers în jos? Care ar fi fost viteza vaporului dacă ar fi mers pe apă stătătoare?



(București, 1953, Anul I școli pedagogice)

421. Se dă un trapez $ABCD$ cu înălțimea de 20 m și aria de 1 800 m^2. Se cere:

1) Cele două baze ale trapezului știind că produsul lor este de 7 200 m^2.

2) Știind că latura neparalelă $\overline{AD} = 25$ m, să se afle:

a) la ce depărtare de vîrful A al trapezului se vor întîlni laturile neparalele;

b) unghiul C al trapezului.

(București, 1953, Anul I școli pedagogice)

422. 1) Se dă unghiul drept xOy. O dreaptă d taie laturile Ox și Oy în A și B respectiv. Se construiesc în afara unghiului, pătratele $OACD$ și $OBEF$. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a laturilor CD și EF opuse laturilor $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ cînd d se deplasează paralel cu sine însuși.

2) Să se arate că p fiind prim, $p^2 - 1$ este divizibil prin 24.

(Iași, 1955, Anul I școli pedagogice)

423. Un cristal de cuarţ are forma unei prisme exagonale regulate, terminată la fiecare bază cu cîte o piramidă regulată, piramidele fiind egale.

Să se calculeze distanţa vîrfurilor piramidelor ştiind că greutatea specifică a cuarţului este 2,6 g/cm³; greutatea cristalului este 15,6 g. Latura exagonului este de 1 cm, iar înălţimea prismei este jumătatea distanţei vîrfurilor piramidelor.

(Se va cerceta mai întîi legătura dintre volumul piramidelor şi al prismei.)

(R.P.R., 1952, Anul II şcoli pedagogice)

424. Fie un sfert de cerc OAB (centrul în O) şi semicercul descris pe OA ca diametru. Să se afle raza cercului tangent interior la sfertul de cerc, exterior la semicerc şi tangent la segmentul $\overline{OB}$.

(R.P.R., 1954, Anul II şcoli pedagogice)

425. Unui triunghi dreptunghic OAB, avînd $\hat{O} = 30°$ şi ipotenuza $\overline{OB} = 10$ cm, i se prelungeşte ipotenuza cu un segment $\overline{BB'}$ egal cu $\overline{AB}$.

Să se afle aria şi volumul corpului ce se naşte prin rotaţia triunghiului ABB' în jurul axei OA.

(Bucureşti, 1953, Anul III şcoli pedagogice)

426. Avem o tablă de zinc în formă de cerc cu raza r, care se taie ca în figură, arcul de cerc CMD avînd raza egală cu jumătate din raza tablei. Din porţiunea OAB se confecţionează un con, iar din porţiunea $ANBDMC$ un trunchi de con.

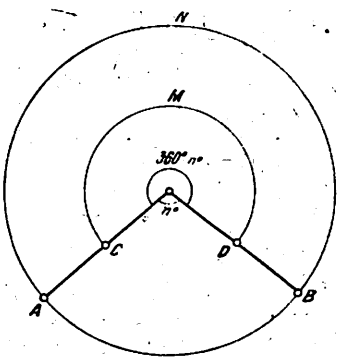


Fig. 176

a) Cum trebuie făcută tăietura astfel încît conul să se suprapună cu baza exact pe baza mică a trunchiului de con?

b) Care este înălţimea totală a corpului obţinut prin această suprapunere? (R.P.R., 1954, Anul III şcoli pedagogice)

427. Profilul unui pod de cale ferată este compus dintr-un arc de cerc de rază R dată şi coarda care îl subîntinde. Înăl-

ţimea maximă a arcului adunată cu lungimea podului este egală cu diametrul cercului din care face parte arcul. La ce distanţă sub pod este centrul cercului?

(Bucureşti, 1950, cl. a VIII-a)

428. Să se arate că dacă punctul M este aşezat în pătratul $ABCD$ cu latura 1, atunci cel mult una din distanţele $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ este mai mare decît $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, cel mult două sînt mai mari decît 1 şi cel mult trei sînt mai mari decît $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(R.P.P., 1950—1951, categoria B)

429. Se dă ecuaţia:

$$\frac{1}{x+b-c}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a-c}$$

Se cere:

1) Să se rezolve ecuaţia.

2) Să se arate că dacă a, b, şi c sînt laturile unui triunghi, ecuaţia are rădăcini reale.

(R.P.R., 1952, cl. a VIII-a)

430. O bucată de tablă triunghiulară cîntăreşte 900 gr. Să se demonstreze că tăind această tablă de-a lungul unei drepte care trece prin centrul de greutate al triunghiului nu se poate tăia o bucată care să cîntărească mai puţin decît 400 gr.

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

431. Un loc de formă dreptunghiulară aşezat pe malul unui rîu este îngrădit pe trei laturi. Lungimea întregului gard este 100 m. Ce dimensiuni trebuie să aibă acest teren pentru ca aria lui să fie maximă?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1954, Kiev)

432. Să se construiască graficul funcţiei:

$$y=\frac{1}{x^2-4}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a VIII-a, 1956, Ordjonikidze)

433. Baza unei piramide este un pătrat. Unghiurile diedre de la bază se raportă ca: 1 : 2 : 4 : 2. Să se găsească aceste unghiuri.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1946, Kiev)

434. Să se înscrie într-un triunghi dat un dreptunghi cu diagonală minimă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a şi a X-a, 1948, Kiev)

435. Să se demonstreze că: $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a şi a X-a, 1949, Kiev)

436. Cunoscînd raza R a cercului circumscris unui triunghi ABC să se calculeze raza cercului care trece prin centrele celor trei cercuri exînscrise triunghiului ABC.

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

437. Să se găsească valoarea maximă şi minimă a expresiei:

$$E = a\cos^2 x + 2b\cos x.\sin x + c\sin^2 x.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a şi a X-a, 1951, Kiev)

438. Una din grinzile principale ale unui pod metalic are talpa superioară în formă de arc de cerc şi doi montanţi $\overline{NM}$ şi $\overline{PS}$, unde $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{CP} = \overline{PB}$. Lungimea podului este $\overline{AB} = 24$ m iar săgeata $\overline{CD} = 5$ m. Se cere:

1) Raza cercului din care face parte talpa superioară.

2) Lungimea tălpii $ANDSB$.

3) Lungimea fiecărui montant: $\overline{MN}$, $\overline{PS}$.

(R.P.R., 1952, cl. a IX-a)

439. 1) Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catetele $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ şi ipotenuza $\overline{BC} = a$. Să se determine pe ipotenuză un punct M egal depărtat de vîrful B şi de cateta AC. Determinarea se va face atît prin calcul cît şi geometric.

2) Ce poziţie are punctul M faţă de mijlocul D al ipotenuzei? Poate să coincidă M cu D? Rezultatul se va stabili prin calcul şi geometric.

3) Ce relaţie trebuie să existe între a şi c pentru ca M să coincidă cu piciorul înălţimii? Să se determine în acest caz $\cos B$.

4) Să se construiască un triunghi care să îndeplinească condiţia de la punctul precedent.

(Bucureşti, 1953, cl. a IX-a)

440. Rădăcinile sistemului :

$$4^x = 32^{\frac{y}{7}-9},$$

$$7^{y+3-x} = \sqrt{49^{3(2x+1)}},$$

sînt valorile, în grade, a două arce $x = \widehat{AM}$ și $y = \widehat{AN}$ luate pe cercul trigonometric, de la originea A.

Din M și N se duc perpendiculare pe diametrul ce trece prin A și se prelungesc pînă ce întîlnesc cercul respectiv în Q și P.

Se cere :

a) Perimetrul, mărimea diagonalelor și aria patrulaterului $MNPQ$.

b) Raportul dintre aria patrulaterului $MNPQ$ și a patrulaterului format unind mijloacele laturilor sale.

(Timișoara, 1953, cl. a IX-a)

441. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de lungime a, pe AB ca latură se construiește triunghiul echilateral ABE, E fiind în exteriorul pătratului și triunghiului echilateral ABF, F fiind în interiorul pătratului.

a) Notînd unghiul $BCE = \alpha$ și unghiul $BCF = \beta$, se cere să se calculeze : $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$ și să se arate că unghiul $FCD = \alpha$ și unghiul $DCE = \beta$.

b) Să se calculeze aria BCE, aria FCE și perimetrul patrulaterului $APCE$, P fiind punctul în care CF întîlnește pe AD.

(Timișoara, 1953, cl. a IX-a)

442. Să se determine valoarea expresiei $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ știind că : $\sin \alpha + \cos \alpha = m$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a și a X-a, 1953, Chișinău)

443. Să se găsească locul geometric al punctelor ale căror coordonate (x, y) satisfac relația : $\sin(x + y) = 0$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1953, Moscova)

444. Laturile unui triunghi formează o progresie aritmetică. Să se arate că raza cercului înscris este egală cu a treia parte dintr-una din înălțimi.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Kiev)

445. a) Să se rezolve ecuația :

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{abc}{x(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

b) Verifică : $x = 0$ ecuația ?

c) Să se deducă că într-un triunghi, între raza cercului înscris r, razele cercurilor exînscrise : r_a, r_b, r_c și raza cercului circumscris R, avem relația :

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R.$$

(Timișoara, 1954, cl. a IX-a)

446. Să se demonstreze identitatea :

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

447. Să se scrie sub o formă mai simplă expresia :

$$E = \frac{\sin 53^\circ - 2 \cos 40^\circ \sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Astrahan)

448. Să se determine valoarea maximă și minimă a funcției :

$$y = 3 \sin x + 4 \cos x$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Ordjonikidze)

449. Este posibilă egalitatea :

$$\sin \alpha = \log \sin \alpha ?$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1954, Astrahan)

450. Dacă : $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(c+d)}{\sin(c-d)}$ atunci mai avem și relațiile :

$$\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \frac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)} \text{ și } \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}$$

b) Să se pună sub formă de produs expresia :

$E = \sin(a-b) \sin(a-c) - \cos b \cos c$

(R.P.R., 1955, cl. a IX-a)

451. Unui cerc de raza R_1 i se construiește un cerc concentric de rază R_2 și un cerc tangent exterior de rază R_3 astfel

că R_1, R_2, R_3 să poată fi privite ca termeni ai unei progresii geometrice descrescătoare. Aria coroanei circulare este de 18π m², iar distanța centrelor este de 12 m.

Fie O_1 și O_2 cele două centre și A punctul de contact al cercurilor. Se duce $AB \perp O_1O_2$.

a) Să se afle cele trei raze;

b) să se determine $\overline{AB}$ astfel ca unghiul $O_1BO_2 = 45°$;

c) la fel pentru unghiul $O_1BO_2 = n°$.

(Iași, 1955, cl. a IX-a)

452. Să se găsească valoarea maximă și să se construiască graficul funcției:

$$y = \frac{6}{x^2 + x + 1}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

453. Să se construiască graficul funcției:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a IX-a, 1956, Ordjonikidze)

454. Se consideră un cub $ABCD\,A'B'C'D'$ cu baza $ABCD$ (A, C vîrfuri opuse) și muchiile laterale $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$. Latura cubului este $\overline{AB} = 3a$.

Se împarte fiecare latură a cubului în cîte trei părți egale. Fie M punctul de diviziune de pe AB, cel mai apropiat de A, iar N și P punctele de diviziune de pe AD, respectiv AA', cele mai apropiate de A. Se taie cubul cu planul MNP și se îndepărtează piramida $AMNP$. Se procedează la fel în toate cele opt colțuri ale cubului. Se cere:

a) să se schițeze poliedrul rămas; să se arate cîte fețe (f), cîte colțuri (c) și cîte muchii (m) are acest poliedru și să se verifice că:

$$f + c = m + 2;$$

b) să se determine aria și volumul acestui poliedru;

c) să se afle unghiul diedru format de planul MNP cu planul bazei cubului;

d) să se calculeze distanța de la vîrful A pînă la planul MNP.
(București, 1950, cl. a X-a)

455. O statuie de înălțime a este așezată pe un soclu de înălțime b. La ce distanță de piciorul soclului trebuie să se afle un observator ca să vadă statuia și soclul sub același unghi? Cu cît trebuie să-și mărească observatorul distanța de soclu pentru a vedea statuia împreună cu soclul sub unghiul cu care a văzut mai înainte numai statuia?

Notă. a) Terenul pe care se află statuia și observatorul este orizontal, iar statuia verticală;

b) nu se ține seamă de înălțimea observatorului.

(București, 1950, cl. a X-a)

456. Să se arate că dacă între unghiurile A și B și laturile opuse lor respectiv a, b, dintr-un triunghi ABC există relația:

$$(a^2 + b^2) \sin (A - B) = (a^2 - b^2) \sin (A + B)$$

atunci un astfel de triunghi este dreptunghic sau echilateral.
(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

457. Să se demonstreze că dacă $A + B + C = 180°$, iar n este un număr impar, atunci:

$$E = \sin nA + \sin nB + \sin nC =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nA}{2} \cos \frac{nB}{2} \cos \frac{nC}{2}.$$

(R.P.P., 1950—1951, categoria A)

458. O grindă de lungime a a fost suspendată orizontal cu extremitățile ei de două cabluri paralele de lungime b. Rotim grinda cu unghiul φ în jurul axei verticale care trece prin centrul grinzii. Cu cît se va ridica grinda?
(R. P. P., 1950—1951, categoria A)

459. Se consideră o secțiune printr-un munte, făcută cu un plan vertical. De la piciorul A al muntelui, la un izvor

duce o potecă ABC care, pînă la B face un unghi u cu orizontala, iar de la B încolo un unghi dublu.

Se cunoaşte :

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 1250 \text{ m.}$$

Distanţa $\overline{AD}$ de la piciorul muntelui pînă la izvor măsurată pe orizontală este 1900 m. Să se afle unghiul pe care poteca AB îl face cu orizontala.

(R. P. R., 1952, clasa a X-a)

460. Avem în faţa noastră o statuie înaltă de 5 m. Dintr-un punct A vedem statuia sub un unghi oarecare, iar dacă ne apropiem de statuie cu $\overline{AB} = 13$ m, o vedem sub un unghi de două ori mai mare. Se cere :

1) Sub ce unghi am văzut statuia cînd am fost în punctul A.

2) Cu cît trebuie să ne apropiem de statuie pentru a o vedea sub un unghi de trei ori mai mare ca din A (se neglijează înălţimea observatorului).

Notă : Unghiul se consideră aflat cînd se determină o funcţie trigonometrică a sa. Nu se vor folosi nici un fel de table.

(R.P.R., 1952, cl. a X-a)

461. O placă are forma unui triunghi dreptunghic cu catele $\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{AC} = 15$ cm. Fie $\overline{AD}$ înălţimea triunghiului. Rotim partea ADC a triunghiului în jurul dreptei AD aşa fel ca dreapta AC, care ocupă poziţia AE să formeze cu AB un unghi de 60°.

Se cere :

1) Distanţa $\overline{BE}$.

2) Unghiul diedru cu care trebuie să rotim triunghiul ADC.

3) Volumul tetraedrului.

4) Distanţa de la punctul D la planul EAB.

(R.P.R., 1952, cl. a X-a).

462. Pentru montarea unei macarale, se întrebuinţează un trepied. Picioarele $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ sînt articulate în P. Punctele A, B, C, sînt aşezate într-un plan orizontal, triunghiul ABC fiind echilateral. Se notează cu O punctul

unde verticala punctului P taie planul ABC. Se dă: $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = l$, $\overline{PO} = h$. Se cere:

1) Să se calculeze laturile triunghiului ABC. Să se pună în expresia obținută $h = 0$ și să se explice rezultatul, arătînd ce poziție are trepiedul în acest caz.

2) Să se calculeze unghiul format de două picioare ale trepiedului. Ce relație trebuie să existe între h și l, pentru ca acest unghi să fie drept? Cît de mare este în acest caz latura triunghiului ABC? Rezultatul se va stabili și pe baza răspunsului de la 1.

3) Să se deducă din expresia obținută pentru cos u care este valoarea maximă pe care o poate lua unghiul u atunci cînd h variază iar l rămîne constant. Ce poziție are în acest caz trepiedul? Se putea obține unghiul maxim fără nici un calcul?

4) Să se determine cosinusul unghiului v format din planele PAB, PBC. Ce relație trebuie să existe între h și l pentru ca acest unghi v să fie drept? Ce legătură există între acest rezultat și 2?

(R. P. R., 1952, clasa a X-a).

463. Să se arate că suma:

$$S = \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + 2.\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \cos\left[\alpha + (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right]$$

este egală cu 0 pentru $n > 1$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1952, Kiev)

464. Fie: $x_0 = 10^9$, $x_n = \frac{x^2_{n-1} + 2}{2x_{n-1}}$.

Să se demonstreze că:

$$0 < x_{36} - \sqrt{2} < 10^{-9}$$

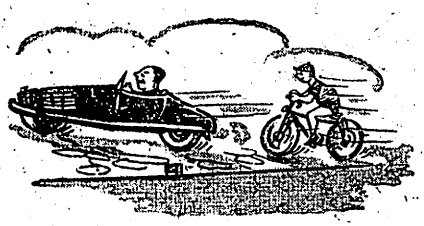
(U.R.S.S., Olimpiada matematica, cl. a X-a 1953, Moscova)

465. Se dă un tetraedru regulat $VABC$ (toate fețele lui sînt triunghiuri echilaterale) cu latura a. Planul determinat de

muchia AB și mijlocul M al înălțimii $\overline{VG}$ taie muchia $\overline{VC}$ în P. Se cer laturile triunghiului ABP.

(București, 1953, cl. a X-a)

466. Din punctul O pleacă o mașină pe o șosea dreaptă și merge cu o viteză constantă v. La această mașină vrea să ajungă un biciclist ca să înmîneze o scrisoare. Acesta se găsește la distanța a de punctul O și distanța b de la șosea. Cu ce viteză minimă trebuie să meargă biciclistul pentru a-și atinge scopul?



(R. P. P., 1952 — 1953, categoria A)

467. Ce condiție trebuie să îndeplinească unghiurile unui triunghi dacă există relația

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică cl. a X-a, 1953, Kiev)

468. Dacă aria sferei înscrise într-un con circular drept este media aritmetică între aria bazei și aria laterală a conului, să se găsească unghiul format de generatoare cu planul bazei.

(București, 1953, cl. a X-a)

469. Să se găsească unghiurile unui triunghi dreptunghic în care raportul dintre raza cercului înscris și raza cercului circumscris este maximă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1953, Kiev)

470. Ce relație algebrică există între α, β și γ cînd este satisfăcută egalitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma. \qquad (1)$$

(R.P.P., 1952—1953, categoria A)

471. Se consideră un triunghi MFF' cu baza $\overline{FF'} = 2c$ în care suma laturilor $\overline{MF}$ și $\overline{MF'}$ este egală cu $2a$. Notînd cu α și β unghiurile din F și F' ale triunghiului, să se demonstreze relația:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a-c}{a+c}.$$

(Timișoara, 1954, cl. a X-a)

472. Se dă $y = \sqrt{4 - x^2} + \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$.

Pentru ce valori ale lui x, valorile lui y vor fi numere reale?

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Astrahan)

473. Într-un pătrat cu latura egală cu unitatea, se înscrie un pătrat cu aria minimă, apoi în pătratul obținut se înscrie din nou un pătrat cu aria minimă ș.a.m.d. Considerînd că procesul indicat se desfășoară nelimitat, să se găsească suma ariilor tuturor pătratelor înscrise.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

474. Să se găsească toate rădăcinile reale ale ecuației:

$$x^2 + 2x \sin (xy) + 1 = 0.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică cl. a X-a, 1954, Moscova)

475. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

476. Să se găsească locul geometric al punctelor ale căror coordonate satisfac relația:

$$\cos (x + y) = 0$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

477. Să se determine valoarea maximă și minimă a funcției:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Ordjonikidze)

478. Să se construiască graficul funcției:

$$y = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ cînd } |x| \geqslant 1 \\ x^3 \text{ cînd } |x| < 1. \end{cases}$$

și să se găsească valoarea funcției y cînd $x = \text{arc sin } 1$.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Astrahan)

479. Să se determine volumul unei piramide patrulatere regulate în care se dă latura bazei a și unghiul diedru α dintre fețele laterale.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Astrahan)

480. Să se găsească valoarea maximă și minimă a expresiei: $\sin x + \cos x$ știind că unghiul x variază în primul cadran.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1954, Kiev)

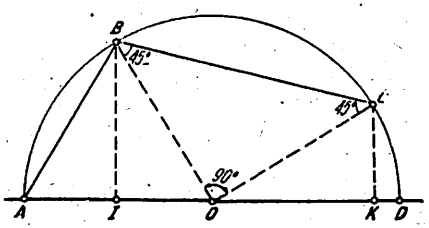
481. Să se verifice identitatea:

$$E = \frac{\text{tg}(x-a) + \text{tg}\, x + \text{tg}(x+a)}{\text{tg}(x-a)\,\text{tg}x.\,\text{tg}(x+a)} = \frac{\cos 2\,a + 3\,\cos 2x + 2}{\cos 2a - \cos 2x}.$$

și să se determine valoarea lui a pentru care expresia este independentă de x.

(Iași, 1955, clasa a X-a)

482. Se consideră patrulaterul $ABCD$ din figură, înscris în semicercul de rază $\sqrt{2}$ metri. Se știe că latura $\overline{BC}$ este văzută din O sub un unghi de 90°, adică $\widehat{BOC} = 90°$ și că $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ metri.



a) Să se afle lungimile segmentelor AB, BC, CD, fără tabele.

b) Să se afle aria corpului născut prin rotirea patrulaterului $ABCD$ în jurul laturii AD.

c) Să se afle volumul aceluiași corp.

(R.P.R., 1955, clasa a X-a)

483. Pe laturile unui triunghi arbitrar ABC, ca baze, sînt construite înspre exteriorul acestui triunghi, triunghiuri isoscele $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ ale căror unghiuri de la bază sînt egale cu 30°. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică cl. a X-a, 1955, Kiev)

484. Să se rezolve sistemul de ecuaţii :

$$\sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y,$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y,$$

unde x, y sînt unghiuri ascuţite.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1955, Kiev)

485. Se dă un con cu raza bazei 4 şi înălţimea 12. Să se determine dimensiunile cilindrului înscris în con dacă aria sa totală are valoare maximă.

(U.R.S.S., Olimpiada matematică cl. a X-a, 1956, Lwow)

486. Să se găsească valoarea maximă şi cea minimă a funcţiei :

$$y = 2 \sin x - \cos 2x$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

487. Să se demonstreze că :

$$E = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Lwow)

488. Să se găsească locul geometric al punctelor ale căror coordonate verifică ecuaţia

$$\sin [(y - 2x)\pi] = 0.$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

489. Să se construiască graficul funcției:

$$y = \frac{12}{x - |x|}$$

(U.R.S.S., Olimpiada matematică, cl. a X-a, 1956, Ordjonikidze)

490. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 (x + a) = \sin (x + 2b) \sin (x + 2c).$$

Se cere să se ajungă la o formă căreia să i se poată aplica logaritmii.

Aplicație numerică:

$$a = -50°; \; b = 65°; \; c = 35°.$$

Rezolvarea fără table. Se vor da toate soluțiile cuprinse între 0° și 720°.

(R.P.R., 1956, cl. a X-a)

491. Un vas închis, compus dintr-un cilindru acoperit cu un con de aceeași bază, are o cantitate de apă care se ridică la înălțimea x, atunci cînd vasul este așezat cu baza cilindrului pe sol și cu axa verticală. Răsturnînd vasul cu baza cilindrului în sus și cu axa verticală, apa se așază în con și eventual și în cilindru, ridicîndu-se la o înălțime y de la vîrful conului. Diametrul cilindrului este 10 cm, înălțimea cilindrului este 30 cm și înălțimea conului de 30 cm.

a) Să se determine y atunci cînd apa se ridică în vas la următoarele înălțimi:

$$x_1 = 5 \text{ cm}; \; x_2 = 20 \text{ cm}; \; x_3 = 50 \text{ cm};$$

b) Să se determine relațiile de dependență dintre x și y atunci cînd x ia toate valorile posibile.

Se va observa că expresia lui y diferă, după cum x este mai mic decît 10, sau este cuprins între 10 și 30, sau este cuprins între 30 și 60.

c) Să se reprezinte grafic variația lui y, cînd x ia toate valorile posibile;

d) Să se calculeze aria figurii determinate de curba reprezentînd variația lui y, axa lui Ox și ordonata maximă a lui y.

(București, 1950, cl. a XI-a)

492. Să se calculeze derivata funcției $y = \sqrt[3]{x}$, fără a aplica formula obișnuită, ci pornind de la definiția derivatei.

(București, 1950, cl. a XI-a)

493. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$), se dau ipotenuza a și raza r a cercului înscris. Se cere:

1) Să se calculeze catetele (algebric). Discuție.

2) Să se construiască triunghiul (soluție geometrică). Discuție.

3) Ce relații există între datele problemei și unghiurile B, C? Din aceste relații să se deducă rezultatele de la punctele 1 și 2.

(R.P.R., 1952, cl. a XI-a)

494. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt exprimate prin a^2, b^2, $(a+b)^2$; a și b fiind numere naturale.

1) Să se arate că pătratul diagonalei paralelipipedului și aria sa totală sînt date de aceeași expresie.

2) Raportul dintre pătratul diagonalei paralelipipedului și suma celor trei dimensiuni este un număr întreg.

3) Presupunînd că dimensiunile unui astfel de paralelipiped sînt în progresie aritmetică, să se calculeze cu o zecimală exactă valorile numerice ale tangentelor unghiurilor formate de diagonalele paralelipipedului cu cele trei muchii care pleacă dintr-o aceeași extremitate a diagonalei.

(R.P.R., 1952, cl. a XI-a)

495. Într-o piramidă patrulateră regulată avînd ca bază un pătrat $ABCD$ și vîrful V, se dă latura bazei $\overline{AB} = a$ și înălțimea $\overline{VO} = i$. Prin dreapta BC și mijlocul M al muchiei laterale VA, se duce un plan.

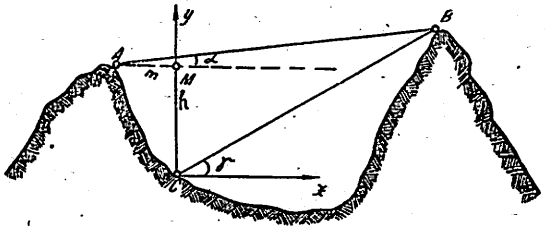
Se cere: 1) Să se figureze secțiunea $BCMN$ ce se obține. 2) Să se figureze perpendiculara coborîtă din vîrful V pe planul de secțiune și să se calculeze distanța de la V la acest plan. 3) Să se calculeze raportul dintre volumul piramidei $VMNCB$ obținută prin secționarea piramidei date și volumul piramidei date.

(R.P.R., 1952, cl. a XI-a)

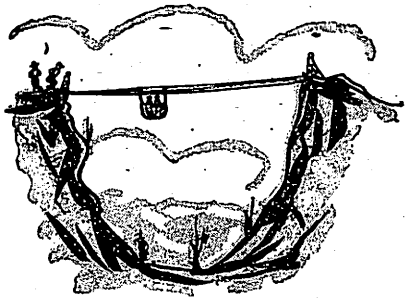
496. Pentru a se instala un funicular între punctele A și B de pe crestetele unor munți, este nevoie să se cunoască distanța AB (lungimea cablului).

În acest scop, topograful măsoară unghiul α al razei AB cu orizontul în A, apoi coboară în punctul C, în planul vertical

prin AB şi măsoară (cu ajutorul mirei şi lanţului) diferenţa de cotă h şi distanţa orizontală m; în sfîrşit măsoară unghiul γ



al razei OB cu orizontul. Cum se va calcula cu aceste date distanţa $\overline{AB}$? (Formula se va face calculabilă prin logaritmi.)
(Iaşi, 1953, cl. a XI-a)



RĂSPUNSURI

PARTEA I

ARITMETICĂ

1. Victor a calculat că poate cumpăra cu banii 1 caiet şi 1/4 kg mere mai mult. Dacă 4 caiete şi 1 kg mere costă 29,48 lei, un caiet şi 1/4 kg mere costă de patru ori mai puţin, adică 29,48 : 4 = 7,37 lei. Victor avea deci la C.E.C.: 29,48 + + 7,37 = 36,85 lei.

2. Dacă prima coloană de pionieri ar sta pe loc, ar vedea cea de-a doua coloană trecîndu-i prin faţă cu 3,3 km/oră. Deoarece, însă, şi ea se mişcă (cu 3 km/oră), viteza cu care un pionier din prima coloană vede trecînd cea de-a doua coloană o găsim adunînd cele două viteze: 3,3 km/oră + 3 km/oră = = 6,3 km/oră, ceea ce face 1,75 m pe secundă (6 300 : 3 600 = = 1,75). Dacă înmulţim viteza cu timpul aflăm spaţiul. Deci, prima coloană are 1,75 · 16 = 28 m, iar coloana a doua 1,75 · 20 = 35 m. Cum fiecare rînd ocupă 0,7 m rezultă că prima coloană are 28 : 0,7 = 40 rînduri, iar coloana a doua 35 : 0,7 = 50 rînduri. Deoarece în fiecare rînd sînt doi pionieri, în coloana întîi sînt 40 · 2 = 80 pionieri, iar în coloana a doua 50 · 2 = 100 pionieri.

3. Deoarece lungimea este mai mare decît lăţimea cu 75 m, dacă scădem din perimetrul dreptunghiului 2 · 75 = 150 m, ceea ce rămîne reprezintă de 4 ori lăţimea (650—150 = 500 m). Împărţind deci pe 500 la 4 vom afla lăţimea locului (500 : : 4 = 125 m). Atunci lungimea are : 125 + 75 = 200 m şi

aria dreptunghiului este de 125.200 = 25 000 m². Atît pe lungimea cît şi pe lăţimea locului, numărul pomilor este mai mic cu 1 decît al intervalelor de cîte 5 m, deoarece la gard nu sînt pomi. Prin urmare, în livadă sînt 39 rînduri (200 : 5 = 40 şi 40 — 1 = 39) de cîte 24 pomi (125 : 5 = 25 şi 25 — 1 = 24), adică 39.24 = 936 pomi.

4. După ceasul de acasă, Gică a plecat la 7 şi 55 minute şi s-a întors, tot după ceasul de acasă, la 13 şi 55 minute. Deci a lipsit de acasă 6 ore (13 şi 55 — 7 şi 55 = 6 ore). După ceasul de la şcoală Gică a ajuns dimineaţa la ora 7 şi 50 minute şi a plecat la prînz acasă la 13 şi 30 minute. Deci a stat la şcoală 5 ore şi 40 minute (13 şi 30 — 7 şi 50 = 5 ore şi 40 minute). Diferenţa dintre timpul arătat de ceasornicul de acasă şi cel arătat de ceasornicul şcolii Gică şi-a petrecut-o pe drum (6—5 şi 40 = 20 minute). Cum drumurile de acasă la şcoală şi de la şcoală acasă sînt egale, rezultă că un singur drum Gică l-a străbătut în 10 minute (20 : 2 = 10). Aşadar, după ceasul şcolii Gică a plecat dimineaţa la ora 7 şi 40. Ceasul de acasă e înainte cu 15 minute.

5. Grupa de pionieri merge cu 3 km pe oră, sau cu 3 000 : 60 = 50 m pe minut. Într-o oră şi 24 minute, sau 84 minute, parcurge 50.84 = 4 200 m, care reprezintă perimetrul dreptunghiului. Dar, cum lungimea sa este de şase ori cît lăţimea, rezultă că două lungimi fac cît 12 lăţimi şi perimetrul cît 14 lăţimi. Lăţimea dreptunghiului este deci 4200 : 14 = 300 m şi lungimea sa 300.6 = 1800 m. Aria locului este 300.1800 = = 540 000 m² = 54 ha şi producţia sa 3000.54 = 162 000 kg = 162 tone grîu.

6. Figurăm în *A* (fig. 1) cele trei cantităţi prin dreptunghiuri egale şi pe deasupra încă 30 litri lapte, iar în *B* o cantitate şi încă 20 litri. Din enunţ rezultă că în bidonul mare se află de două ori mai mult lapte ca în cel mic, ceea ce înseamnă că dacă mai punem alături de bidonul mic, figurat în *B*, încă o cantitate şi 20 litri, obţinem în dreapta tot atît cît în stînga *A*.

Scoţînd din stînga 2 cantităţi şi în dreapta la fel, rămîn 40 litri în poziţia *B* şi o cantitate plus 30 litri în poziţia *A*. Rezultă că valoarea cantităţii reprezentată prin dreptunghi este de 10 litri şi prin urmare vasul mare are 3.10 + 30 = 60 litri lapte, iar cel mic 1.10 + 20 = 30 litri.

7. După reducerea prețurilor, încasările au ajuns la $\frac{5}{4}$ din cele vechi, iar vizitatorii la $\frac{3}{2}$. Urmează că prețul unui bilet redus de la unitate, a fost de :

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

iar reducerea este de :

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 16{,}66\ \%.$$

Observare. Oricare ar fi fost prețul vechi al unui bilet de intrare, cu datele următoare ale problemei, găsim același procent de 16,66% cu care au fost reduse prețurile biletelor.

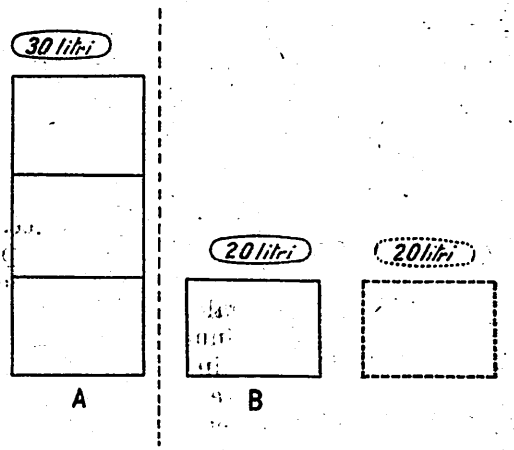


Fig. 1

8. În cele 20 minute sînt cuprinse timpul pentru dus și cel de întors. Timpul cît fuge veverița, fără alună, este dat de numărul care arată de cîte ori 5 m se cuprinde în lungimea drumului parcurs, iar timpul pentru întoarcere este marcat de numărul care arată de cîte ori 3 m se cuprind în același drum.

Rezultă din acest raționament că $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$ din numărul care arată lungimea drumului este 20 și prin urmare lungimea drumului de la vizuină la alun este de :

$$20 : \frac{8}{15} = \frac{300}{8} \text{metri} = 37{,}50 \text{ metri}.$$

9. Pionierii urcă cu 1,5 km pe oră, adică folosesc pentru a urca 1 km 60 : 1,5 = 40 minute și coboară cu 4 km pe oră, fiindu-le necesar 60 : 4 = 15 minute pentru 1 km.

Deci, le sînt necesare 40 — 15 = 25 minute mai puțin pentru a coborî 1 km, decît pentru a-l urca. Deoarece la îna-

poiere, fac cu 20 minute mai puțin decît la ducere, urmează că panta de la tabără la vîrful muntelui este cu 20 : 25 = 0,8 km mai mare decît cea de la vîrf la cabană.

Lungimea pantei de la tabără la vîrf este deci (4 + 0,8) : 2 = 2,4 km, iar cea de la vîrf la cabană este de 2,4 — 0,8 = = 1,6 km. Pentru a ajunge în vîrful muntelui, pionierii folosesc 2,4 : 1,5 = 1,6 ore.

10. Aflăm înălțimea lăzii, împărțind capacitatea sa (52,650 dm^3 = 52 650 cm^3) la aria bazei (25.60 = 1500 cm^2) : 52 650 : : 1500 = 35,1 cm.

După prima vînzare, orezul ocupă numai $\frac{8}{9}$ din înălțimea lăzii, adică 35,1. $\frac{8}{9}$ = 31,2 cm.

După a doua vînzare mai rămîne $\frac{1}{4}$ din cantitatea precedentă sau 31,2. $\frac{1}{4}$ = 7,8 cm înălțime. După a treia vînzare, înălțimea orezului este egală cu $\frac{1}{3}$ din cea precedentă, adică 7,8. $\frac{1}{3}$ = 2,6 cm.

11. Deoarece pentru 7 coborîri și 8 ridicări este nevoie de un timp cu $1\frac{1}{6}$ minute mai lung decît pentru 8 coborîri și 7 ridicări, rezultă că timpul necesar unei coborîri este cu $1\frac{1}{6}$ minute mai mic decît timpul necesar unei ridicări. Pentru 5 coborîri și 5 ridicări fiind necesare $30\frac{5}{6}$ minute, pentru o coborîre și o ridicare sînt necesare $30\frac{5}{6} : 5 = 6\frac{1}{6}$ minute. Atunci, 2 coborîri durează $6\frac{1}{6} - 1\frac{1}{6} = 5$ minute; o coborîre: $5 : 2 = 2\frac{1}{2}$ minute, iar o ridicare: $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{6} = 3\frac{2}{3}$ minute.

12. Vom începe rezolvarea de la sfîrșitul problemei. Clasa a V-a primind $\frac{8}{9}$ din ultimul rest și $\frac{2}{3}$ din carte, rezultă

că $\frac{1}{9}$ din rest reprezintă $\frac{2}{3}$ din carte. Deci, ultimul rest este de $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ cărți. Atît a primit clasa a V-a. Clasa a VI-a a primit $\frac{7}{16}$ din primul rest și $\frac{3}{4}$ de carte. Prin urmare, $\frac{9}{16}$ din primul rest valorează $\frac{3}{4}$ de carte plus cele 6 cărți de clasa a V-a, iar $\frac{1}{16}$ din acestea face deci $6 \frac{3}{4} : 9 = \frac{3}{4}$ de carte. Clasa a VI-a a primit $\frac{7}{16}$ plus $\frac{3}{4}$ de carte, adică $\frac{3}{4} \cdot 7 + \frac{3}{4} = \frac{21}{4} + \frac{3}{4} = 6$ cărți.

La fel se calculează și numărul cărților primite de clasa a VII-a. Veți afla că au fost în total 18 cărți și fiecare clasă a primit cîte 6 cărți.

13. Trenurile vor porni din nou de la capătul liniilor deodată după un număr de minute ce va fi egal cu c.m.m.m.c. al numerelor 22, 24, 33 și 36, adică timpurile ce revin trenurilor pentru a parcurge întreaga linie dus și întors. C.m.m.m.c. al acestor numere este egal cu 792. Aceasta înseamnă că trenurile vor pleca din nou deodată după 792 minute (13 ore și 12 minute), adică la ora 19 și 12 minute. Deoarece 10% din timpul necesar fiecărui tren pentru a se înapoia în stația de plecare reprezintă opririle în stații, primul tren merge numai $22 - 2{,}2 = 19{,}8$ minute. Numai jumătate din acest timp, adică $19{,}8 : 2 = 9{,}9$ minute este necesar pentru a se parcurge linia în întregime. Cealaltă jumătate reprezintă drumul la întoarcere. Cum viteza trenului este de 40 km/oră $= \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ km pe minut, rezultă că lungimea primei linii este de $9{,}9 \cdot \frac{2}{3} = 6{,}6$ km.

Tot așa se află și lungimea celorlalte linii: linia a doua are 7,2 km, linia treia 9,9 km și linia patra 10,8 km.

14. Deoarece patru încărcături ale garniturii a doua fac cît 9 ale garniturii întîia, rezultă că o încărcătură a celei de a doua garnituri face cît $\frac{9}{4}$ încărcături ale garniturii întîia. Deci, în timp ce prima garnitură scoate 8 încărcături, garnitura a doua

scoate cît $\frac{9}{4} \cdot 5 = \frac{45}{4} = 11\ \frac{1}{4}$ încărcături ale celei dintîi. În acest timp, garnitura a doua recuperează deci $11\frac{1}{4} - 8 = 3\frac{1}{4}$ încărcături ale garniturii întîia. Pentru a recupera pe cele 195 încărcături ale primei garnituri, garnitura a doua trebuie să scoată de $195 : 3\frac{1}{4} = 60$ ori cîte 5 încărcături adică $60 \cdot 5 = 300$ încărcături.

15. În fiecare zi ceasornicul înaintează cu :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ minute.}$$

Ca ceasornicul să ajungă cu 5 minute înainte față de primul, trebuie să vedem, cîte de $\frac{1}{6}$ să luăm pentru a forma $5 - \frac{1}{2}$ minute (am avut în vedere că în prima zi ceasul de comparație și cel studiat nu arată nici o diferență la începutul zilei).

Calculul ne dă :

$$\left(5 - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{6} = 27 \text{ zile.}$$

În seara zilei a 28-a se ating 5 minute de înaintare.

16. Primului i-au mai rămas de citit cu $225 - 165 = 60$ pagini mai multe decît celui de al doilea. La fiecare pagină rămasă de citit celui de al doilea îi corespund 5 pagini rămase celui dintîi. Urmează că la o pagină rămasă celui de al doilea îi corespunde o diferență de 4 pagini între cei doi cititori. Ca această diferență să ajungă de 60 pagini, înseamnă că cel de al doilea mai are de citit $60 : 4 = 15$ pagini.

Cartea are deci $225 + 15 = 240$ pagini.

17. Primul autobus pleacă din același loc după $1^h\,15^m + 5^m = 80$ minute, al doilea după $1^h\,30^m + 6^m = 96$ minute, iar al treilea după $1^h\,52^m + 8^m = 120$ minute.

Intervalul de timp de la ora 6 pînă la prima reîntîlnire a celor trei autobuse, în același loc, este cel mai mic comun multiplu al numerelor 80; 96; 120; adică $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$ minute $= 8$ ore.

Urmează că abia la ora 14 vor pleca toate trei autobuse, deodată, din același loc.

18. După ce primul a parcurs $3 \cdot 48 = 144$ km, pornește la drum și cel de al doilea automobil. Acesta recuperează în fiecare oră $60 - 48 = 12$ km. Pentru a recupera 144 km îi trebuie deci:

$$144 : 12 = 12 \text{ ore.}$$

Urmează că distanța parcursă este de:

$$12 \cdot 60 = 720 \text{ km.}$$

19. Dacă după operația de trecere a 3 elevi din clasa a V-a A în clasa a V-a B, am mai scoate doi elevi, ar rămîne în fiecare clasă același număr de elevi, iar ambele clase vor avea în total: $64 - 2 = 62$ elevi.

Urmează că fiecare clasă ar avea 31 elevi. Numărul de 31 elevi din prima clasă provine însă după ce am trecut 3 elevi în cealaltă clasă și după ce am scos încă doi elevi. Rezultă de aci că prima clasă are:

$$31 + 3 + 2 = 36 \text{ elevi,}$$

iar cealaltă clasă: $31 - 3 = 28$ elevi.

20. Năutul prăjit intră în amestec cu 40%, el costă deci $\frac{40 \cdot 20}{100} = 8$ lei. Urmează deci că cele 60% de cafea prăjită dintr-un kilogram costă $128 - 8 = 120$ lei.

Un kilogram de cafea prăjită costă prin urmare:

$$\frac{12\,000}{60} = 200 \text{ lei.}$$

Fiecare kilogram de cafea prăjită provine din $\frac{5}{4}$ cafea naturală, pentru că prin prăjire se pierde $\frac{1}{5}$. Rezultă deci că un kilogram de cafea naturală costă:

$$200 \cdot \frac{4}{5} = 160 \text{ lei.}$$

21. Prima cifră a cîtului se obține împărțind $3\square 7$ la $2\square 2$ de unde rezultă că această cifră este 1. Observînd că deîmpărțitul este egal cu produsul dintre cît și împărțitor, trebuie ca ultima cifră a cîtului să fie 1 sau 6, pentru că numai $1 \cdot 2$, sau $6 \cdot 2$ ne dă ultima cifră a deîmpărțitului 2. Așadar, cîtul este 141 sau 146.

1) Presupunînd cîtul 141 atunci avem soluțiile:

$$32\,712 = 232.141$$

$$39\,762 = 282.141$$

2) Presupunînd cîtul 146 se găsesc soluțiile:

$$36\,792 = 252.146$$

$$39\,712 = 272.146$$

22. Din datele problemei rezultă că împărțitorul celor două numere este mai mare decît 13 și se cuprinde exact în

$$9428 - 13 = 9415 \text{ și } 3235 - 7 = 3228.$$

Acum să căutăm un divizor comun al numerelor 9415 și 3228 mai mare decît 13.

Descompunem numerele în factori primi:

$$3228 = 2^2 \cdot 3.269,$$

$$9415 = 5 \cdot 7.269.$$

Se vede că singurul divizor comun care corespunde este 269.

23. Un kilometru pe oră este același cu $\frac{1000}{60} = \frac{50}{3}$ metri pe minut. Dacă viteza trenului ar fi 1 kilometru pe oră, un interval între doi stîlpi ar fi parcurs de tren în $62{,}50 : \frac{50}{3} = 3{,}75$ minute. Rezultă de aci că numărînd intervalele timp de 3,75 minute = 3 minute 45 secunde, rezultatul numărării reprezintă numărul de kilometri pe oră a trenului.

24. Operația 15% din 36 ne conduce la calculul $\frac{15 \cdot 36}{100}$ iar 36% din 15 la calculul $\frac{36 \cdot 15}{100}$.

Din cauza proprietății comutative a înmulțirii numerelor, reiese că cele două rezultate sînt aceleași.

În cazul general $a\%$ din b reprezintă $\frac{ab}{100}$, iar $b\%$ din a este $\frac{ba}{100}$. Deci pe baza aceleiași proprietăți comutative avem $\frac{ab}{100} = \frac{ba}{100}$.

25. Calculăm succesiv împărțirile de paranteze din paranteza mare,

$$\left(12\frac{1}{2} - 2\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{40}\right) = \frac{21}{2} : \frac{7}{40} = \frac{21}{2} \cdot \frac{40}{7} = 3 \cdot 20 = 60.$$

$$\left(2 + 6\frac{2}{3}\right) : \left(1\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}\right) = \frac{26}{3} : \frac{1}{6} = \frac{26}{3} \cdot \frac{6}{1} = 52.$$

Valoarea parantezei mari este deci:

$$60 - 52 = 8.$$

Avem de aflat x din împărțirea:

$$8 : x = 8,$$

rezultă: $x = 1$.

26. După ce s-a cheltuit $\frac{2}{5}$ din sumă, au mai rămas $\frac{3}{5}$. Din aceștia s-a mai cheltuit $\frac{3}{4}$, adică $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$.

În urma primelor două cumpărături persoana a cheltuit

$$\frac{2}{5} + \frac{9}{20} = \frac{17}{20} \text{ din sumă,}$$

i-au mai rămas deci $\frac{3}{20}$, ceea ce valorează 293,10.

Rezultă că $\frac{1}{20}$ din sumă face $\frac{293{,}10}{3} = 97{,}70$ lei.

Prin urmare toată suma valorează $97{,}70 \cdot 20 = 1954$ lei.

Verificare: $\frac{2}{5} \cdot 1954 = \frac{3908}{5} = 781{,}60$, i-au rămas $1954 - 781{,}60 = 1172{,}40$ lei din care cheltuiește $\frac{3}{4}$, adică $\frac{3}{4} \cdot 1172{,}40 = 879{,}30$.

Avem $781{,}60 + 879{,}30 + 293{,}10 = 1954$ lei.

27. Expresia din acoladă fiind deîmpărțitul, $\frac{1}{48}$ împărțitor și 144 cîtul exact, rezultă că această expresie este egală cu:

$$144 \cdot \frac{1}{48} = 3$$

$$\left[\left(\frac{3x-4}{5} - 15\frac{1}{3}\right) \cdot 3 - 2 + \frac{3}{4}\right] : \frac{2}{5} + 1\frac{1}{8} = 3,$$

de unde deducem:

$$\left[\left(\frac{3x-4}{5} - 15\frac{1}{3}\right) \cdot 3 - 2 + \frac{3}{4}\right] : \frac{2}{5} = 3 - 1\frac{1}{8} = 1\frac{7}{8} = \frac{15}{8}.$$

Raționînd ca mai sus, expresia din paranteza mare este egală cu:

$$\left(\frac{3x-4}{5} - 15\frac{1}{3}\right) \cdot 3 - 2 + \frac{3}{4} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{4}.$$

De unde deducem:

$$\left(\frac{3x-4}{5} - 15\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 2,$$

apoi, dat fiind că paranteza e deîmnulțit, 3 înmulțitor și 2 produs, rezultă:

$$\frac{3x-4}{5} - 15\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Aplicînd proba scăderii ($\frac{3x-4}{5}$ descăzut, $15\frac{1}{3}$ scăzător și $\frac{2}{3}$ rest), avem:

$$\frac{3x-4}{5} = 15\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 16.$$

Din operația $\frac{3x-4}{5}=16$ ($3x$ — 4 deîmpărțit, 5 împărțitor și 16 cît), deducem:

$$3x-4=80 \text{ și apoi } 3x=84$$

și în fine:

$$x=\frac{84}{3}=28.$$

28. Primul lucrător culege o pagină în:

$$\frac{3\frac{1}{2}}{2\frac{3}{16}}\text{ore}=\frac{8}{5}\text{ore}=96\text{ minute},$$

iar al doilea culege o pagină în 80 minute.

Acesta din urmă lucrează mai repede folosind $96-80=16$ minute mai puțin pentru o pagină, de aceea reușește la sfîrșitul zilei de lucru să recupereze cele $1\frac{2}{5}$ ore $=84$ minute de avans ale primului lucrător, ceea ce înseamnă că el a cules:

$$\frac{84}{16}\text{pagini}=5\frac{1}{4}\text{pagini}.$$

29. A doua zi s-a însămînțat: $\frac{5}{8}\cdot\frac{11}{15}=\frac{11}{24}$; a treia zi:

$\frac{7}{9}\cdot\left(1-\frac{4}{15}-\frac{11}{24}\right)=\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{40}=\frac{77}{360}$; în ziua patra: $\frac{4}{5}\cdot\left(1-\frac{4}{15}-\right.$

$\left.-\frac{11}{24}-\frac{77}{360}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{11}{40}-\frac{77}{360}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{11}{180}=\frac{44}{900}=\frac{11}{225}$ și în a cincea

zi restul: $1-\frac{4}{15}-\frac{11}{24}-\frac{77}{360}-\frac{44}{900}=\frac{11}{180}-\frac{44}{900}=\frac{11}{900}$.

Aceşti $\frac{11}{900}$ reprezintă $2\frac{1}{2}$ ha deci întreaga suprafaţă este egală

cu: $2\frac{1}{2} \cdot \frac{900}{11} = \frac{5}{2} \cdot \frac{900}{11} = \frac{4500}{2.11} = \frac{2250}{11} = 204\frac{6}{11}$ ha.

Urmează că:

în prima zi s-a însămînţat: $\frac{4}{15} \cdot \frac{2\,250}{11} = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$;

în a doua zi s-a însămînţat: $\frac{11}{24} \cdot \frac{2\,250}{11} = \frac{2\,250}{24} = 93\frac{3}{4}$;

a treia zi s-a însămînţat: $\frac{77}{360} \cdot \frac{2\,250}{11} = 43\frac{3}{4}$;

a patra zi s-a însămînţat: $\frac{11}{225} \cdot \frac{2\,250}{11} = 10$ ha

şi în a cincea zi s-a însămînţat: $\frac{11}{900} \cdot \frac{2\,250}{11} = 2\frac{1}{2}$ ha.

30. Dacă şi un exemplar din seria A ar costa 1 leu, atunci toate exemplarele ar fi costat 140 lei. Faptul că ele costă totuşi 160 lei provine din cauză că fiecare exemplar din seria A costă cu 1,25 lei mai mult. Urmează că avem atîtea numere din seria A, de cîte ori se cuprinde 1,25 în diferenţa $160 - 140 = 20$, adică:

$20 : 1{,}25 = 16$ exemplare din seria A

şi prin urmare $140 - 16 = 124$ exemplare din seria B.

31. La început au fost $7.12 = 84$ farfurii. După ce s-au spart 9 farfurii, au rămas $84 - 9 = 75$, care reprezintă cu 32 mai mult decît numărul paharelor rămase. Au fost deci, la urmă, $75 - 32 = 43$ pahare. Prin urmare, la început au fost $43 + 3 = 46$ pahare.

32. Numărul care a fost împărţit la 7 este:

$$39.7 = 273.$$

Produsul la care s-a adăugat 8 este :

$$273 - 8 = 265.$$

Împărțind acest rezultat la 5 și apoi după adunarea lui 4 la cît, obținem întreitul numărului cerut :

$$265 : 5 = 53 ; \quad 53 + 4 = 57.$$

Numărul căutat este deci :

$$57 : 3 = 19.$$

33. Personalul parcurge drumul spre Satu Mare pînă la mijlocul său în :

$$300 : 30 = 10 \text{ ore}$$

și ajunge acolo la ora $12 + 10 = 22$.

Acceleratul care pleacă din Satu Mare parcurge deci cei 300 km în $22 - 14 = 8$ ore.

Rezultă că acceleratul are o viteză egală cu :

$$300 : 8 = 37{,}5 \text{ km/oră}.$$

34. Drumul pe care-l parcurge avionul într-o oră este parcurs de tren în 8 ore. Rezultă că un astfel de drum este parcurs de avion în 7 ore mai puțin decît îl parcurge trenul. Ruta București-Moscova fiind parcursă de avion în 56 ore mai puțin decît o parcurge trenul, înseamnă că aceasta se întîmplă în

$$56 : 7 = 8 \text{ ore}.$$

Deci durata călătoriei cu trenul este de $8 + 56 = 64$ ore.

35. Din problemă reiese că $\frac{2}{3}$ din ultimul rest fac 40 lei, de unde rezultă că ultimul rest a fost de 60 lei. Deoarece în al doilea magazin s-a cheltuit $\frac{1}{3}$ din rest și i-au rămas 60 lei, urmează că $\frac{2}{3}$ din suma cu care a intrat persoana în al doilea magazin a fost de $60 + 60 = 120$ lei, deci suma a doua a fost de 180 lei, care reprezintă totodată și suma rămasă în urma

cheltuielilor din primul magazin. Urmează de aci că $\frac{2}{3}$ din suma inițială a fost de $180 + 90 = 270$ lei, prin urmare suma cu care a pornit persoana la cumpărături a fost de 405 lei.

În primul magazin s-au cheltuit $\frac{1}{3} \cdot 405 + 90 = 225$ lei, în al doilea magazin $\frac{1}{3} \cdot 180 + 60$ lei $= 120$ lei și în al treilea $\frac{1}{3} \cdot 60 + 20$ lei $= 40$ lei.

Verificare : $405 = 225 + 120 + 40 + 20$.

36. Dacă scădem 2 din numărul căutat obținem un număr divizibil prin 3, 5 și 7.

Cel mai mic număr divizibil cu acestea este cel mai mic multiplul comun al lor, care în acest caz este chiar produsul numerelor, adică $3.5.7 = 105$.

Pentru a obține numărul căutat, adăugăm acestuia pe 2, avem deci rezultatul 107.

Verificare : $107 = 3.35 + 2$
$107 = 5.21 + 2$
$107 = 7.15 + 2$

37. Numărul 6 750 descompus în factori primi are forma :

$$6\,750 = 2.3^3.5^3,$$

iar cel mai mare divizor comun este 3.5.

Avînd în vedere că la formarea c.m.m.d.c. se iau factorii comuni cu puterea cea mai mică, rezultă că într-un factor figurează numai 3^1, iar în același factor sau în celălalt figurează 5^1.

Soluțiile posibile sînt deci următoarele :

I $3.5 = 15$ și $3^2.5^2.2 = 450$,

II $3^2.5 = 45$ și $3.5^2.2 = 150$,

III $3.5^2 = 75$ și $3^2.5.2 = 90$,

IV $2.3.5 = 30$ și $3^2.5^2 = 225$.

38. Dacă micșorăm numărul mai mare cu 13, diferența dintre noul număr și numărul cel mic este $271 - 13 = 258$.

Însă noul număr fiind de 7 ori mai mare ca numărul cel mic, diferența dintre acesta și numărul cel mic, adică 258, este de 6 ori numărul cel mic.

Urmează că numărul cel mic, este $258 : 6 = 43$ și prin urmare celălalt este :

$$7.43 + 13 = 314.$$

Verificare : $314 - 43 = 271$ și

$$314 = 7.43 + 13.$$

39. Micșorînd cu 2 lei prețul registrului și mărind prețul cărții cu 4 lei, ele vor costa împreună :

$$23 - 2 + 4 = 25 \text{ lei.}$$

În această sumă intră prețurile presupuse noi al registrului și al cărții (care este acum de 4 ori mai scumpă decît registrul), rezultă de aci că de 5 ori prețul nou al registrului este 25 lei, deci prețul nou al registrului este $25 : 5 = 5$ lei. Urmează că prețul adevărat al registrului este $5 + 2 = 7$ lei și al cărții 16 lei.

40. Dacă presupunem că producția din fiecare lună ar fi rămas aceeași, atunci la sfîrșitul anului am fi avut :

$1\,920 - (10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110)$ mese, adică :

$$1920 - 660 = 1\,260 \text{ mese,}$$

în 12 luni ; prin urmare cîte 105 mese pe lună.

Rezultă că în luna ianuarie s-au produs 105 mese, în luna iunie $105 + 50 = 155$, iar în decembrie $105 + 110 = 215$ mese.

41. Presupunînd cartea mai ieftină cu 75 de bani, înseamnă că 8 caiete costă cu $16{,}50 - 0{,}75 = 15{,}75$ lei mai mult decît un caiet, deci 7 caiete costă 15,75 lei.

Și prin urmare un caiet costă $15{,}75 : 7 = 2{,}25$ lei, iar o carte costă $16{,}50 + 2{,}25 = 18{,}75$ lei.

Cunoscînd prețurile pentru un caiet și o carte, rezultă că 3 cărți și 7 caiete costă împreună :

$$3.18{,}75 + 7.2{,}25 = 72 \text{ lei.}$$

42. Cele două numere nu pot fi simultan divizibile cu 9 pentru că atunci diferența dintre suma cifrelor primului număr și suma cifrelor celui de al doilea $(7 + a + 4 + b) - (6 + 4 + a + b) = 1$, ar trebui să fie divizibilă cu 9, ceea ce nu se poate.

Urmează deci să găsim a și b astfel ca fiecare din cele două numere, separat, să îndeplinească condițiile din problemă.

1) Să găsim a și b astfel ca $7a\,4b$ să fie divizibil prin 8 și 9 dar nedivizibil prin 5.

Pentru ca numărul să fie divizibil prin 9 trebuie ca suma cifrelor $11 + a + b$ să fie divizibilă prin 9. Rezultă deci că $a + b$ poate fi 7, sau 16 și unde b să fie o cifră pară diferită de 0, pentru ca numărul $7a4b$ să nu fie divizibil cu 5 și să fie divizibil cu 2, fiind divizibil cu 8.

Putem deci lua $b=2$ și $a=5$; $b=4$ și $a=3$; $b=6$ și $a=1$; $b=8$ și $a=8$, cărora le corespund numerele 7 542; 7 344; 7 146; 7 848 dintre care numai 7 344 și 7 848 sînt divizibile și prin 8.

2) Să găsim a și b astfel ca $64ab$ să fie divizibil prin 8 și 9 și nedivizibil prin 5. Pentru divizibilitatea prin 9 trebuie să avem $10 + a + b$ divizibil prin 9. Urmează că $a + b$ poate fi 8 sau 17 și astfel că numărul de două cifre ab să fie divizibil prin 8 fiindcă 6 400 este divizibil prin 8.

Putem lua numai $ab = 08$ și avem astfel singura soluție 6 408 număr divizibil prin 8 și 9, dar nedivizibil prin 5.

43. Din enunț rezultă că numărul de pionieri divizat prin 6, 7 și 8 dă mereu același rest 5.

Urmează că dacă scădem din numărul de pionieri pe 5, obținem un multiplu al lui 6; 7 și 8. Cel mai mic multiplu comun al acestor numere este 168. Orice alt multiplu depășește 200. Rezultă de aci că numărul de pionieri este:

$$168 + 5 = 173.$$

Verificare:

173 : 6 dă cîtul 28 și restul 5
173 : 7 dă cîtul 24 și restul 5
173 : 8 dă cîtul 21 și restul 5.

44. Numărătorul expresiei F se poate scrie egal succesiv cu: $2 + \frac{20}{3} - \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{6} - \frac{11}{12} = \frac{26}{3} - \frac{14}{45} - \frac{11}{12} = \frac{1\,339}{180}$.

Numitorul este egal succesiv cu:

$$1 + \frac{10}{19} - \frac{115}{96} = \frac{29}{19} - \frac{115}{96} = \frac{599}{19.96}.$$

De unde rezultă:

$$F = \frac{1\,339}{15} \cdot \frac{19.8}{599} = \frac{1339 \cdot 19 \cdot 8}{15.599}.$$

45. Acceleratul parcurge într-o oră $\frac{1}{12}$ din drumul București-Oradea, iar personalul $\frac{1}{15}$. Diferența de parcurs, într-o oră, este: $\frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$.

Rezultă că cei 10 km cu care merge mai repede, într-o oră, acceleratul decît personalul, reprezintă $\frac{1}{60}$ din drum.

Urmează că distanța București-Oradea este de:

$$60.10 = 600 \text{ km.}$$

46. Pentru fiecare problemă greșită s-a scăzut de fapt $5 + 3 = 8$ puncte. Dacă elevul ar fi rezolvat bine toate cele 10 probleme ar fi primit $10.5 = 50$ puncte. În realitate a pierdut $50 - 26 = 24$ puncte.

Rezultă deci că a greșit $24 : 8 = 3$ probleme și a rezolvat bine $10 - 3 = 7$ probleme.

47. Dacă micșorăm, a doua oară, numărul rațelor cu trei, numărul găinilor trebuie micșorat cu 3.3 pentru ca raportul să se păstreze. Numărul găinilor este scăzut deci cu $9 + 5 = 14$.

Numărul 14 reprezintă dublul numărului de rațe de la început cînd numărul găinilor era de 5 ori mai mare decît al rațelor.

Așadar, avem: $14 : 2 = 7$ rațe și deci:

$$5.7 = 35 \text{ găini.}$$

48. Ceasul rămîne în urmă pe oră cu $\frac{105}{9} = \frac{35}{3}$ secunde.

Prin urmare în 24 ore ceasul rămîne în urmă cu:

$24 \cdot \frac{35}{3} = 8 \cdot 35 = 280$ secunde $= 4^m$ 40 secunde.

49. Cele 360 000 cuie cîntăresc $360.30{,}2 = 10\,872$ kg, care intră în $10\,872 : 20 = 543{,}6$ lăzi, deci pentru a putea dispune de 360 000 cuie se vor lua 544 lăzi. Transportul lăzilor se face în grupe de cîte 50 lăzi, deci în $544 : 50 = 10{,}88$ grupe, adică în realitate în 11 transporturi.

Suma plătită pentru aducerea cuielor la locul construcției este deci de:

$$544.90 + 11.91 = 49\,961 \text{ lei.}$$

50. Excursioniștii au adus:

$$80 + 90 + 100 + 115 + 125 = 520,$$

din care au cheltuit:

$$520 - 120 = 400 \text{ lei.}$$

Rezultă că fiecare a cheltuit:

$$400 : 5 = 80 \text{ lei.}$$

Primul nu are de primit nimic, al doilea are de primit $90 - 80 = 10$ lei, al treilea $110 - 80 = 30$ lei, al patrulea $115 - 80 = 35$ lei și al cincilea $125 - 80 = 45$ lei.

51. Să căutăm numerele de trei cifre al căror produs al cifrelor este 252.

Avem $252 = 2^2.3^2.7$. De aci deducem posibilitățile de a descompune 252 într-un produs de trei factori, care pot reprezenta cifre.

$252 = 4.9.7$ sau $252 = 6.6.7$.

Se pot forma deci următoarele combinații de numere:
497; 479; 749; 794; 947; 974; 667; 676; 766
dintre care răspund problemei numerele prime:

479 și 947.

52. Numărătorul expresiei E este egal succesiv cu:

$$4-\frac{15}{4}+\frac{1}{12}\cdot\frac{8}{7}+1=1+\frac{1}{4}+\frac{2}{21}=\frac{113}{21},$$

iar numitorul:

$$3+\frac{10}{4}-\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{7}=3+\frac{5}{2}-\frac{2}{5}=\frac{51}{10}.$$

$$\text{Rezultă: } E=\frac{113}{21}\cdot\frac{10}{51}=\frac{1\,130}{1\,071}=1\frac{59}{1\,071}.$$

53. Dacă notăm cu n numărul km, parcurşi de tren pe oră, va trebui să calculăm în cîte minute străbate trenul n intervale de cîte 50 m fiecare, adică distanţa $50.n$ metri. Folosind relaţia $s=v.t$ în care $s=50.n$ metri şi:

$$v=\frac{n\text{ km}}{\text{oră}}=\frac{n\cdot 1\,000}{60}\,\frac{m}{\text{minut}},$$

deducem:

$$t=\frac{s}{v}=\frac{50\cdot n}{\frac{n\cdot 1000}{60}}=\frac{3\,000\,n}{1\,000\,n}=3 \text{ minute.}$$

54. Prima raboteză face 20 curse duble în 9 minute, folosind pentru tăiere de două ori mai mult timp decît pentru înapoiere, adică 6 minute pentru tăiere şi 3 minute pentru înapoiere. Rezultă că raboteza taie în cele 6 minute $20.66 = 1\,320$ cm, prin urmare viteza de tăiere (V_1) a primei raboteze este $1\,320:6 = 220$ cm pe minut, deci 2,2 m pe minut. Raportul vitezelor celor două raboteze fiind $\frac{2}{3}$, putem scrie: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$ şi rezultă că: $V_2=\frac{3\cdot 2{,}2}{2}=3{,}3$ m pe minut. Deoarece în timpul unei curse duble, cuţitul se deplasează cu 2 mm şi piesele au lăţimea de 14 cm = 140 mm, pentru prelucrarea pieselor în întregime sînt necesare $140:2 = 70$ curse duble. Prima raboteză făcînd 20 curse duble în 9 minute, pentru 70

asemenea curse îi sînt necesare $\frac{9 \cdot 70}{20} = 31$ minute şi 30 secunde.

A doua raboteză taie cu viteza de 330 cm pe minut, deci foloseşte pentru o singură tăiere în lungimea celor 5 piese $(5.22 = 110$ cm$) \frac{1}{3}$ minut $= 20$ secunde.

O cursă dublă este efectuată deci în $20 + 10 = 30$ secunde şi cele 70 curse necesare prelucrării în întregime a pieselor $30.70 = 2\,100$ secunde $= 35$ minute.

55. Să calculăm sub forma cea mai simplă termenii proporţiei:

$$3 - \frac{0{,}045}{0{,}12} = 3 - \frac{45}{120} = 3 - \frac{3}{8} = \frac{21}{8},$$

$$0{,}17\, x = \frac{17}{100} \cdot x,$$

$$3\frac{1}{2} = \left(3\,\frac{0{,}2}{1{,}5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{2} - \frac{37}{15} = \frac{31}{30}, \quad \frac{8}{7} - \frac{4{,}2}{6\frac{1}{5}} = \frac{101}{7 \cdot 31} = \frac{101}{217}.$$

Termenul care cuprinde necunoscuta este egal cu:

$$\frac{17}{100}\, x = \frac{\frac{21}{8} \cdot \frac{101}{217}}{\frac{31}{30}} = \frac{21 \cdot 101 \cdot 30}{8 \cdot 217 \cdot 31},$$

de unde rezultă:

$$x = \frac{21 \cdot 101 \cdot 30 \cdot 100}{8 \cdot 217 \cdot 31 \cdot 17} = 6\,\frac{15\,603}{16\,337}$$

56. În timp de un minut acul mare descrie un unghi de 6°, iar cel orar 0°,5, rezultă că unghiul dintre ace este 6° — 0°,5 = 5°,5. Cînd acele ajung în prelungire, unghiul devine de 180°; aceasta se va întîmpla în timp de:

$$180° : 5°{,}5 = 32 \text{ minute şi } 43 \text{ secunde.}$$

Ora exactă este deci:

$$12^{\text{ore}}\, 32^{\text{minute}}\, 43^{\text{secunde}}.$$

57. Numărul de ture al roții mici echivalează cu un număr de dinți multiplu al lui 36, care trebuie să conțină numărul dinților roții mari, adică este un multiplu comun al numerelor 36 și 54.

Pentru că vrem să aflăm numărul de ture pînă la prima revenire a semnelor, față în față, vom calcula deci cel mai mic comun multiplu, care este : c.m.m.c.m. (36 ; 54) = 108.

Numărul de ture în jurul roții mari este deci $\frac{108}{54} = 2$, iar în jurul centrului său este : $\frac{108}{36} = 3$.

58. După datele problemei se vede că restul este egal cu $\frac{3}{5}$ din rest și încă 452 lei. Rezultă deci că 452 reprezintă $\frac{2}{5}$ din rest și prin urmare restul este egal cu $\frac{452}{2} .5 = 1\,130$.

Deoarece prima parte este jumătate din întreaga sumă mai puțin 153, atunci cealaltă parte, adică restul de 1 130, este egală cu jumătate din întreaga sumă plus 153. Urmează deci că jumătate din întreaga sumă este 1 130 — 153 = 977 și deci suma totală este egală cu :

$$977.2 = 1\,954.$$

59. După adăugarea venitului la suma inițială, școala a avut 110% din suma repartizată, căminul cultural 108%, iar spitalul 105%. Urmează că suma repartizată pentru căminul cultural a fost de $\frac{110}{108}$ din aceea a școlii, iar a spitalului $\frac{110}{105}$ din aceea a școlii.

Toate împreună au fost :

$1 + \frac{110}{108} + \frac{110}{105} = \frac{11\,590}{3\,780}$ din suma primită de școală.

Urmează că suma primită de școală a fost :

$$\frac{1\,159\,000 \cdot 3.780}{11\,590} = 378\,000.$$

Aceea primită de cămin a fost: $378\,000 \cdot \frac{110}{108} = 385\,000$ şi aceea primită de spital a fost: $378\,000 \cdot \frac{110}{105} = 396\,000$.

60. Prin mărirea lungimii cu 4 cm şi a lăţimii cu 6 cm dreptunghiul (fig. 2) creşte cu aria unui dreptunghi egală cu de 4 ori lăţimea, cu încă unul egal de 6 ori lungimea, adică de 18 ori lăţimea şi în plus cu încă $6 \cdot 4$ cm^2. Dreptunghiul iniţial creşte aşadar cu o arie dreptunghiulară de 22 ori lăţimea şi cu încă 24 cm^2. Rezultă de aci că 22 ori lăţimea valorează $108 - 24 = 84$ cm^2 şi prin urmare lăţimea dreptunghiului este: $\frac{84}{22} = 3\frac{9}{11}$, iar lungimea este: $3 \cdot 3\frac{9}{11} = 11\frac{5}{11}$.

61. Diferenţa de 5 minute pe care o constatăm la plecarea lui Ionescu de acasă este diferenţa dintre înaintarea ceasului şi a timpului necesar pentru a ajunge de acasă la gară.

La întoarcere, diferenţa de $11^h\,23^m - 10^h\,48^m = 35$ minute este suma dintre timpul necesar de a merge de la gară acasă şi înaintarea ceasului.

Sîntem în situaţia de a afla două numere a căror sumă este 35 şi diferenţa 5.

Se obţine că înaintarea ceasului pe drum de acasă la gară este de 20 minute, iar drumul durează 15 minute.

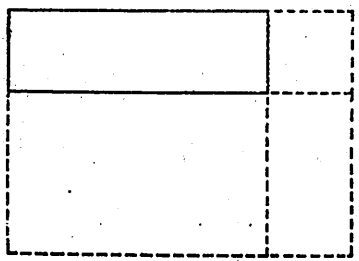


Fig. 2

62. Dacă îmi aleg numărul a şi scriu la dreapta lui 7, obţin $10a + 7$. Scăzînd din rezultat de nouă ori a, aflu:

$$10a + 7 - 9a = a + 7.$$

Din acest rezultat, după scăderea lui 7, îmi rămîne a, tocmai numărul pe care mi l-am ales.

63. Un număr de două cifre $a\ b$ (a zeci şi b unităţi) are ca valoare $10a+b$. Dacă adunăm la acesta pe $9(b-a)$ obţinem:

$$10a + b + 9(b-a) = 10b + a = ba, \qquad (1)$$

adică numărul scris cu aceleaşi cifre în ordine inversă.

Rezultatul obținut este valabil pentru orice valori ale lui a și b. În cazul cînd cifra unităților este mai mică decît aceea a zecilor, scriem egalitatea (1) sub forma :

$$10a + b - 9\ (a-b) = 10b + a = ba.$$

În acest caz spunem că din numărul ab se scade de 9 ori diferența dintre zeci și unități și vom obține un număr cu aceleași cifre în ordine inversă.

Exemple :

$$37 + 9 \cdot 4 = 73$$
$$85 - 9 \cdot 3 = 58$$

64. Un număr care se termină cu 5 se scrie :

$$10n + 5,$$

unde n este numărul zecilor.

Pătratul acestui număr este :

$$(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n\,(n + 1) + 25.$$

Prin urmare pătratul unui număr care se termină cu 5 se află înmulțind n numărul zecilor cu consecutivul acestuia $n + 1$, se adaugă la produs două zerouri și se adaugă și la rezultat 25, ceea ce explică procedeul de calcul din enunț.

65. Diferența de 48 minute provine din faptul că la înapoiere călătorul urcă mai puțin drum. Să considerăm lungimea coborîșurilor 7 părți egale de drum în kilometri, atunci urcușurile la dus valorează 10 părți egale de drum.

Timpul necesar pentru parcurgerea urcușurilor și a coborîșurilor la dus este de $\left(\frac{10}{15} + \frac{7}{30}\right)$ a unei părți, iar la întoarcere de $\left(\frac{7}{15} + \frac{10}{30}\right)$ a unei părți. Diferența de timp pe drumul în pantă este deci :

$$\left(\frac{10}{15} + \frac{7}{30}\right) - \left(\frac{7}{15} + \frac{10}{30}\right) = \frac{1}{10} \text{ a unei părți.}$$

Rezultă că o parte de drum în pantă are lungimea :

$$\frac{48}{60} \text{ ore} : \frac{1}{10} = \frac{48 \cdot 10}{60} = 8 \text{ km.}$$

Lungimea urcușurilor, la dus, este deci $10.8 = 80$ km, iar a coborîșurilor $7.8 = 56$ km. Deducem că lungimea drumului orizontal este de:

$$192 - (80 + 56) = 56 \text{ km.}$$

66. Presupunînd curgerea uniformă, primul robinet dă:

$$168 \text{ hl} : 24 = 7 \text{ hl pe oră,}$$

iar al doilea robinet dă $60 \text{ hl} : 12 = 5$ hl pe oră.

Ambele robinete dau pe oră $7 \text{ hl} + 5 \text{ hl} = 12$ hl.

Urmează deci că bazinul de 204 hl poate fi umplut în:

$$204 : 12 = 17 \text{ ore.}$$

67. Ion efectuează pe oră: $\dfrac{1}{16\frac{40}{60}} = \dfrac{3}{50}$ din lucrare,

Dumitru: $\dfrac{1}{7} - \dfrac{3}{50} = \dfrac{29}{350}$, iar Nicolaie: $\dfrac{1}{8} - \dfrac{29}{350} = \dfrac{59}{1400}$ din lucrare.

Toți trei lucrează pe oră:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{50} = \frac{37}{200} \text{ din lucrare.}$$

a) Lucrînd toți trei împreună, lucrarea se termină în:

$$1 : \frac{37}{200} = \frac{200}{37} \text{ ore} = 5\frac{15}{37} \text{ ore} = 5 \text{ ore } 24 \text{ minute } 19 \text{ secunde.}$$

b) Suma de lei 180 se împarte proporțional cu productivitatea pe oră.

Astfel, Ion primește: $\dfrac{180 \cdot \frac{3}{50}}{\frac{37}{200}} = 58{,}38$ lei,

Dumitru primește: $\dfrac{180 \cdot \frac{29}{350}}{\frac{37}{200}} = 80{,}61$ lei,

Nicolaie primește : $\dfrac{180 \cdot \frac{59}{1\,400}}{\frac{37}{200}} = 41$ lei.

c) $58{,}38 + 80{,}61 + 41 = 179{,}99 \approx 180$ lei.

68. Capacitatea în litri a celor 8 500 kg motorină este :

$$\frac{8\,500}{0{,}87} \approx 9\,770 \text{ litri.}$$

Aceștia intră în :

$9\,770 : 200 = 48{,}8$ butoaie de 200 litri.

Rezultă deci că pentru transportul motorinei sînt necesare :

49 butoaie de 200 litri fiecare.

69. Să presupunem că toate grinzile ar cîntări la fel, cîte 0,48 tone fiecare, atunci cele 30 grinzi ar cîntări :

$$30 \cdot 0{,}48 = 14{,}4 \text{ tone.}$$

Diferența de $14{,}4 - 11{,}8 = 2{,}6$ tone provine de acolo că am mărit fiecare grindă de brad cu $0{,}48 - 0{,}28 = 0{,}2$ tone.

Urmează de aci că sînt :

$$2{,}6 : 0{,}2 = 13 \text{ grinzi de brad}$$

și prin urmare 17 grinzi de stejar.

70. Avem : $0{,}28 + 0{,}32 + \frac{2}{7} = 0{,}6 + \frac{2}{7} = \frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{31}{35}$.

Rezultă că pentru flori s-a repartizat : $\frac{4}{35}$ din teren.

Pentru fasole și flori împreună sînt repartizate :

$$0{,}28 + \frac{4}{35} = \frac{7}{25} + \frac{4}{35} = \frac{69}{175}.$$

Cele $\frac{69}{175}$ părți de teren valorează 210 m², urmează că întregul teren are :

$$\frac{175 \cdot 210}{69} \text{ m}^2 = \frac{36\,750}{69} \text{ m}^2 = 532{,}61 \text{ m}^2.$$

Terenul pentru cartofi este deci $532{,}61 . 0{,}32 \approx 170{,}44$ m², pentru fasole $532{,}61 \cdot 0{,}28 \approx 149{,}13$ m²; pentru ceapă $532{,}61 \cdot \frac{2}{7} \approx 151{,}79$ m²; pentru flori $532{,}61 \cdot \frac{4}{35} \approx 60{,}71$ m².

71. Dacă prețul nominal este 100, anticarul cumpără cartea cu 80 și o revinde cu 100 lei. Urmează că la 80 cîștigă 20, prin urmare la 100 cîștigă $\frac{2\,000}{80} = 25\%$.

72. În intervalul unei ore sînt două poziții de perpendicularitate.

În decursul a 12 ore sînt 11 intervale deci 22 poziții. Prin urmare în 24 ore acele sînt perpendiculare între ele de 44 ori.

73. Fiecare zero de la sfîrșitul unui număr apare ca rezultatul, existenței printre factorii primi ai numărului, o pereche de factori primi 2.5. Pentru a afla cîte zerouri are 50 ! este necesar să vedem cîți factori 5 sînt cuprinși în 50 ! între numerele 1, 2, 3 ..., 50 există $\frac{50}{5} = 10$ numere care au ca factor prim 5; $\frac{50}{5^2} = 2$ numere care au ca factor pe 5^2 și nici un număr care să aibă ca factor 5 la o putere mai mare. Există deci în 50 ! numărul 5 de putere $10 + 2 = 12$. Numărul 50 ! are 12 zerouri.

74. Împărțim cele 500 lăzi în 240 grupe, punînd în grupa n lăzile care conțin n mere. Dacă în fiecare grupă ar fi cel mult două lăzi, avem în total $2.240 = 480$ lăzi, ceea ce e imposibil. Deci există o grupă cu cel puțin 3 lăzi.

75. Să considerăm fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ (a și b nu au nici un divizor comun) și complimentara ei pînă la 1:

$$F = 1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}.$$

Să arătăm că această fracție este ireductibilă. Vom demonstra aceasta prin absurd. Să presupunem că există un număr $d \neq 1$ care se cuprinde în b și $(b-a)$, atunci d ar divide și diferența $b-(b-a) = a$, adică ar urma că d divide a și b, ceea ce este absurd, pentru că a și b nu au nici un divizor comun.

76. Din enunț rezultă că numărul N al merelor mai puțin unul este divizibil prin 2; 3; 4; 5; 6, adică este un multiplu

comun al acestor numere. Cel mai mic comun multiplu este 60, urmează deci că numărul merelor din coş este de forma:

$$N = 60.c + 1.$$

Numărul N trebuie să fie simultan divizibil prin 7. Să găsim ce formă trebuie să aibă c. Pentru aceasta desfacem pe N în două numere dintre care unul este divizibil cu 7, astfel:

$$N = 63.c - (3c - 1).$$

Ca să avem condiţia îndeplinită rezultă că $3c - 1$ trebuie să fie divizibil prin 7. Putem găsi o astfel de valoare pentru c prin încercări. Cea mai mică este $c = 5$, altele sînt $c = 12$; 19; ...

Pentru $c = 5$ avem $N = 301$; pentru $c = 12$, $N = 721$ etc.

Este probabil, dat fiind capacitatea obişnuită a coşurilor, că colectivistul avea cu sine 301 mere.

Observare. Se pot înlătura încercările pentru găsirea lui c, scriind că $3c - 1 = 7p$ sau $c = \frac{7p+1}{3} = 2p + \frac{p+1}{3}$.

Numărul c fiind întreg, trebuie să avem $p + 1 = 3k$ şi prin urmare avem $c = 2(3k - 1) + k = 7k - 2$, iar:

$$N = 60(7k - 2) + 1 = 420k - 119.$$

Pentru $k = 1$ avem $N = 301$ etc. ...

77. Pentru a dovedi afirmaţia din enunţ este necesar să arătăm că 43^{43} şi 17^{17} se termină cu o aceeaşi cifră.

Observăm că ultima cifră a unui produs se obţine luînd cea din urmă cifră din produsul ultimelor cifre. Rezultă de aci că ultima cifră a lui 43^{43} e aceeaşi ca la 3^{43}.

Să observăm legea de formare a ultimelor cifre a puterilor lui 3:

$3^1 = 3$; $3^2 = 9$; 3^3 are ultima cifră 7; 3^4 are u.c.1; 3^5 are ultima cifră 3 etc. .... Deci după fiecare patru puteri consecutive se revine la aceeaşi cifră. Aşadar 3^{43} are aceeaşi ultimă cifră ca şi 3^3, adică 7.

În mod analog, 17^{17} are aceeaşi ultimă cifră ca şi 7^{17}. Legea de formare a ultimelor cifre este : $7^1 = 7$; 7^2 are u.c. 9 ; 7^3 are u.c. 3 ; 7^4 are u.c. 1 ; 7^5 are ultima cifră 7 etc. ... Deci şi la puterile lui 7 după fiecare patru puteri succesive revine aceeaşi ultimă cifră. Rezultă că 7^{17} are aceeaşi ultimă cifră ca şi 7^1 adică 7.

Numerele 43^{43} şi 17^{17} terminîndu-se cu aceeaşi cifră 7, rezultă că diferenţa $43^{43} - 17^{17}$ este divizibilă cu 10.

78. Dacă z reprezintă cifra zecilor şi u aceea a unităţilor, trebuie să avem :

$$10z + u = 2zu,$$

de unde rezultă succesiv :

$$u = 2z\,(u-5)\,;\; z = \frac{u}{2\,(u-5)}\,. \qquad (1)$$

Cifra z fiind număr întreg, trebuie ca u să fie divizibil prin $2(u-5)$, ceea ce implică ca u să se împartă exact atît la 2, cît şi la $u-5$. Trebuie să căutăm deci printre cifrele u pare pe acelea care se divid la $u-5$. Singura care satisface această cerinţă este $u = 6$, iar în acest caz avem $z = 3$.

Numărul căutat este deci 36. Într-adevăr, avem :

$$36 = 2.3:6.$$

79. Dacă împărţim $n^2 + 8n + 15$ prin $n+4$, aflăm :

$$N = \frac{n^2 + 8n + 15}{n+4} = \frac{(n+4)^2 - 1}{n+4} = n + 4 - \frac{1}{n+4}.$$

Pentru ca N să fie întreg, ar trebui ca $\frac{1}{n+4}$ să fie întreg.

Or n fiind întreg, pozitiv, avem $n + 4 > 1$, deci $n + 4$ nu poate fi divizor pentru 1. Prin urmare $n^2 + 8n + 15$ nu este divizibil prin $n + 4$ pentru nici o valoare întreagă pozitivă a lui n.

80. Scoatem din 2322 numărul cifrelor pe care le au paginile numerotate cu cîte o singură cifră, adică 9. Apoi scoatem din rest numărul cifrelor pe care le au paginile numerotate cu două cifre, adică $90.2 = 180$. Rămîn $2\,322 - 9 - 180 = 2\,133$ cifre cu care sînt numerotate restul paginilor. Întrucît numărul cifrelor pe care le au numerele de la 100 pînă la 999 este de

$900.3 = 2\,700$, rezultă că cele 2 133 cifre sînt repartizate pe pagini numerotate cu cîte 3 cifre, adică $2\,133 : 3 = 711$ pagini.

Dicționarul are deci 9 pagini de o singură cifră + 90 pagini de două cifre + 711 pagini de trei cifre = 810 pagini.

81. Avem: $N - 7 = \mathcal{M}7$; $N - 8 = \mathcal{M}8$; $N - 9 = \mathcal{M}9$;
deci: $N = \mathcal{M}7 + 7 = \mathcal{M}7$
la fel: $N = \mathcal{M}8 + 8 = \mathcal{M}8$ și $N = \mathcal{M}9$, rezultă:
$N = \mathcal{M}.7.8.9 = \mathcal{M}\,504$.

Numărul N de trei cifre nu poate fi decît 504, căci $504.2 = 1\,008$ este un număr de patru cifre.

82. Pătratele căutate au cel mult valoarea 4 009 999 și cel puțin 4 000 000, deci rădăcina pătrată este cel mult:

$$\sqrt{4\,009\,999} = 2\,002,\text{f sau cel puțin } \sqrt{4\,000\,000} = 2000.$$

Rezultă că numerele cerute pot fi doar pătratele numerelor 2 000; 2 001; 2002, ale căror pătrate sînt respectiv:

4 000 000; 4 004 001; 4 008 004.

83. Fracția $\frac{1}{n(n+1)}$ este diferența fracțiilor $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{n+1}$;

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Avînd în vedere acest lucru, suma noastră se scrie:

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Efectuînd reducerile, aflăm:

$$S = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

84. Un număr de trei cifre abc (a sute, b zeci, c unități) are valoarea $100a + 10b + c$, iar raportul dintre acest număr și suma cifrelor sale este reprezentat de fracția:

$$F = \frac{100\,a + 10\,b + c}{a + b + c}.$$

Împărțind ambii membri cu 100 avem:

$$\frac{F}{100} = \frac{100\,a + 10\,b + c}{100\,a + 100\,b + 100\,c}. \qquad (1)$$

Membrul drept al egalității (1) este o fracție subunitară, pentru că numitorul conține $100b + 100c$ în loc de $10b + c$. Membrul drept devine egal cu 1 dacă $b = c = 0$. Așadar, expresia din membrul stîng este cel mult egală cu 1, deci F are valorea maximă 100 și aceasta se întîmplă cînd cifra sutelor este diferită de zero.

Astfel:

$$\frac{100}{1+0+0} = \frac{200}{2+0+0} \cdots = \frac{900}{9+0+0} = 100.$$

85. Să efectuăm operațiile indicate în enunț. Notînd cu n numărul întreg dat și cu N rezultatul calculelor, avem:

$$N = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2} = \left(n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\left(n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{sau } N = n\left(n + \frac{2}{n}\right) = n^2 + 2.$$

Se vede din rezultatul obținut că N este un număr întreg.

86. Egalitatea dată este echivalentă cu:

$$(n-m)(n+m) = 1954 = 2 \cdot 977. \qquad (1)$$

Numerele $n-m$ și $n+m$ sînt amîndouă pare sau impare, de aceea egalitatea (1) nu este posibilă pentru că membrul drept poate fi descompus în doi factori numai în următoarele forme:

1.1954 sau 2.977 (977 este prim) care sînt produse de 2 factori cu parități diferite.

Nu există numere întregi m și n care să satisfacă ecuația $m^2 + 1954 = n^2$!

87. Vom urmări cîte numere, unele după altele, trebuie scrise astfel ca ele să însumeze un număr de cifre cît mai apropiat de 1955.

Numerele începînd de la 1 pînă la 10 se scriu cu 9 cifre; de la 1 pînă la 100 se scriu cu $9 + 2.90 = 189$ cifre; de la 1 pînă la 1000 se scriu cu $9 + 2.90 + 3.900 = 2889$ cifre

ș.a.m.d.

Deoarece pînă la inclusiv cifra căutată sînt 1955 cifre, înseamnă că pe baza rezultatelor de mai sus numărul la care trebuie să ne oprim pentru ca, începînd de la 1 pînă la el să avem un număr de cifre foarte apropiat de 1955, este un număr de trei cifre.

Pentru a-l găsi, scădem din 1955 numărul de cifre necesare pentru a scrie numerele pînă la 100 şi obţinem:

$$1955 - (9 + 2.90) = 1955 - 189 = 1766.$$

Aceste 1766 cifre rămase sînt repartizate pe grupe de 3 cifre al căror număr este:

$$1766 : 3 = 588 \text{ rest } 2.$$

Urmează că trebuie să scriem toate numerele de la 1 pînă la inclusiv $100 + 587 = 687$ pentru a obţine 1953 cifre. Rezultă deci că cifra a 1955-a este a doua cifră de la numărul 688 care vine după 689, adică 8.

88. Să notăm cele patru numere întregi, în ordine crescîndă, cu a, b, c, d. După enunţ avem $a < b < c < d$ şi:

$$a + b + c + d = bc + ad. \qquad (1)$$

Se observă că $b + c < bc$, pentru că chiar în cazul cînd a ar avea cea mai mică valoare, b ar avea cel puţin valoarea 2 şi atunci bc este cel puţin $c + c$, în timp ce în stînga avem numai $b + c < c + c$. Rezultă de aici că pe baza egalităţii (1) trebuie să avem $a + d > ad$.

Această din urmă inegalitate atrage după sine $a = 1$, căci dacă am avea $a > 1$, de pildă 2, produsul ad ar fi cel puţin $d + d$ care e mai mare ca $a + d$ pentru că $d > a$, ceea ce ar fi în contrazicere cu $a + d > ad$.

Aşadar $a = 1$. Înlocuind această valoare în (1), obţinem:

$$1 + b + c + d = bc + d,$$

sau: $1 + b + c = bc$.

Această ultimă egalitate atrage după sine $b = 2$, pentru că dacă b ar fi mai mare ca 2, bc ar fi cel puţin $c + c + c$ care nu poate fi egal cu $c + b + 1$ ($b < c$ şi $1 < c$). Introducînd $b = 2$, în $1 + b + c = bc$, obţinem $c = 3$, iar prin înlocuirea valorilor $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$ în (1) se constată că egalitatea (1) este satisfăcută pentru orice d, avînd egalitatea $1 + 2 + 3 + d = 6 + d$.

Rezultă că cele patru numere care satisfac condițiile din problemă sînt :

$$1;\ 2;\ 3 \text{ și orice } d>3.$$

Numărul $d>3$ poate fi întreg sau orice alt număr pozitiv mai mare ca 3.

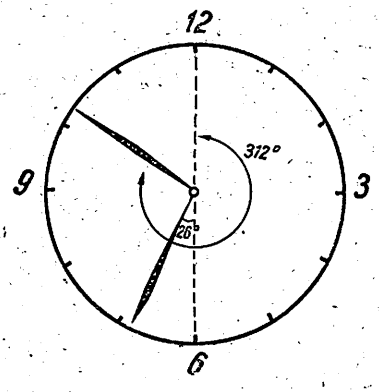


Fig. 3

Exemplu :

$$1+2+3+11=2.3+1.11,$$

sau :

$$1+2+3+7{,}3=2.3+1.7{,}3.$$

89. a) Presupunem pornirea acelor de la ora 6 fix ; în 52 minute, acul orar descrie un unghi egal cu :

$$52\cdot 0°{,}5=26°,$$

iar minutarul descrie un unghi de :

$$52\cdot 6°=312°,$$

deci unghiul dintre ace este egal cu :

$$312°-(180°+26°)=106°.$$

b) La ora 6 și 52 minute unghiul dintre ace fiind de 106°, rezultă că acele vor fi perpendiculare după această oră. Să vedem, cînd ?

Într-un minut, înaintarea în unghi a acului mare față de cel mic este de $6°-0{,}5°=5°,5$.

Ca să ajungă minutarul perpendicular pe acul orar, după ora $6^h\ 52^m$ trebuie ca unghiul dintre ace să crească cu $270°-106°=164°$. Aceasta se întîmplă în :

$$164° : 5°{,}5 = 29^m\ 49^s,$$

adică la ora $6^h\ 52^m + 29^m\ 49^s = 7^h\ 21^m\ 49^s$.

90. a) Pînă la ora 9 și 40 minute acul orar a descris, în sens direct, un unghi de $270° + \frac{40}{60}\cdot 30° = 290°$, iar acul minutar

a descris un unghi de $\frac{40}{60} \cdot 360° = 240°$. Rezultă deci că unghiul dintre ace, la această oră, este:

$$290° - 240° = 50°.$$

b) Într-un minut acul orar descrie un unghi de 0°,5, iar cel minutar un unghi de 6°. Diferența de înaintare, pe minut, între ele este de 5°,5. Pentru ca acele să devină perpendiculare trebuie să treacă un timp în care diferența de înaintare în grade să devină $50° + 90° = 140°$;
aceasta se întîmplă după

$$140 : 5{,}5 = 25^{\text{minute}}\ 27^{\text{secunde}}, \text{ adică la ora}$$
$$9^{\text{ore}}\ 40^{\text{minute}} + 25^{\text{minute}}\ 27^{\text{sec.}} = 10^{\text{ore}}\ 5^{\text{min.}}\ 27^{\text{sec.}}$$

91. Călătorul parcurge $1\frac{2}{3}$ km în timp de $\frac{1\frac{2}{3}}{4} = \frac{5}{12}$ ore. Căruța parcurge același drum în timp de $\frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ ore. Urmează de aci că viteza căruței este de:

$$\frac{1\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} \text{ km pe oră} = 10 \text{ km pe oră}.$$

În timp ce călătorul străbate 13 km, adică în $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ ore, căruța ajunge în B, stă $\frac{1}{2}$ oră, se întoarce și-l întîlnește pe călător la capătul C al celor 13 km. Aceasta înseamnă că drumul CB dus și întors este egal cu $\left(3\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot 10 = \frac{11}{4} \cdot 10 = 27{,}50$ km și prin urmare $CB = \frac{27{,}50}{2} = 13{,}75$ km, iar tot drumul AB este egal cu:

$$\overline{AB} = 1\frac{2}{3} + 13 + 13{,}75 = 28{,}42 \text{ km}.$$

92. Din datele problemei rezultă că vinul de calitatea a II-a costă cu 4 lei mai mult decît vinul de calitatea a III-a.

Dacă presupunem că primele două calităţi de vin ar costa la fel cu vinul de calitatea a III-a, preţul amestecului ar scădea cu: $13.8 + 10.4 = 144$ lei,

adică ar costa $494 - 144 = 350$ lei.

Urmează de aci că: 13 litri + 10 litri + 12 litri = 35 litri de calitatea a III-a costă 350 lei, deci un litru din acest vin costă 10 lei şi prin urmare cel de calitatea a II-a 14 lei şi cel de calitatea I, 18 lei.

93. a) Cele două brigăzi lucrează pe zi $\frac{2040}{12} = 170$ ha.

Dacă fiecare tractorist din cele două brigăzi ar fi lucrat cîte 6 ha pe zi, ambele brigăzi ar fi arat $6.25 = 150$ ha. Diferenţa de 20 ha $= 170-150$ provine din faptul că tractoriştii din brigada a doua lucrează 8 ha în loc de 6 ha. Rezultă deci că numărul tractoriştilor din brigada a doua este:

$$20 : 2 = 10,$$

iar numărul celor din brigada I este 15.

b) Tractoriştii din prima brigadă ară în 12 zile un număr de $15.6.12 = 1080$ ha, iar cei din brigada a doua $10.8.12 = 960$ ha.

Economia de combustibil a celor din brigada I este:

$$1080 \cdot 2 = 2160 \text{ litri în valoare de}$$

$$2160 \cdot 2{,}2 = 4752 \text{ lei.}$$

Cei din brigada a doua au economisit:

$$960 \cdot 1{,}5 = 1440 \text{ litri în valoare de}$$

$$1440 \cdot 2{,}2 = 3168 \text{ lei.}$$

Cele două brigăzi au economisit în 12 zile

$$2160 + 1440 = 3600 \text{ litri în valoare de}$$

$$4752 + 3168 = 7920 \text{ lei.}$$

94. Din 1950 pînă în 1952 numărul a crescut cu 8000 peste dublul numărului celor trimişi în 1950, iar din 1952 pînă în 1954 numărul a mai crescut cu 160 000; urmează de aci că din 1950 pînă în 1954 numărul celor trimişi la odihnă a fost cu

168 000 peste dublul numărului celor trimiși în 1950. Pe de altă parte știm că numărul celor din 1954 întrece pe acel din 1950 cu 334 000. Diferența de la 168 000 la 334 000, adică 166 000 este tocmai numărul celor trimiși la odihnă în 1950. Rezultă că numărul celor trimiși la odihnă în 1954 a fost de :

$166\,000 + 334\,000 = 500\,000$

95. Dacă α și β sînt două numere prime între ele, atunci numerele $D\alpha$ și $D\beta$ au ca cel mai mare divizor comun pe D. Pentru ca suma lor să fie S trebuie :

$$D\alpha + D\beta = S,$$

sau :

$$\alpha + \beta = \frac{S}{D}.$$

Așadar, vom alege două numere α și β prime între ele a căror sumă să fie $\frac{S}{D}$, iar produsul acestora prin D vor fi numerele căutate.

1) $S = 700,\ D = 100\ \frac{S}{D} = 7,\ \alpha + \beta = 7.$

Putem avea : $\alpha = 1,\ \beta = 6$, atunci numerele sînt 100 ; 600
$\alpha = 2,\ \beta = 5$ „ „ „ 200 ; 500
$\alpha = 3,\ \beta = 4$ „ „ „ 300 ; 400

2) $S = 1323,\ D = 147,\ \frac{S}{D} = 9\ \alpha + \beta = 9.$

Putem avea : $\alpha = 1,\ \beta = 8$, atunci numerele sînt 147 ; 1176
$\alpha = 2,\ \beta = 7$ „ „ „ 294 ; 1229
$\alpha = 4,\ \beta = 5$ „ „ „ 588 ; 735.

96. Cele $4\frac{1}{4}$ kg orez și $1\frac{1}{2}$ kg macaroane fac cît $\left(4\frac{1}{4} \cdot 2\right)$ kg griș și $1\frac{1}{2}$ kg biscuiți mai puțin $1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{10}$ lei, adică $8\frac{1}{2}$ kg griș și $1\frac{1}{2}$ kg biscuiți costă $47\frac{17}{20} + 1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{10} = 54$ lei sau :

17 jumătăţi de kg griş şi 3 jumătăţi kg biscuiţi costă 54 lei. Mai avem date că 8 jumătăţi kg griş şi 9 jumătăţi kg biscuiţi costă $65\frac{1}{4}$ lei.

Rezultă de mai sus că:

51 jumătăţi kg griş şi 9 jumătăţi kg biscuiţi costă $54.3 = 162$ lei; şi cum avem 8 jumătăţi kg griş şi 9 jumătăţi kg biscuiţi costă $65\frac{1}{4}$ lei, înseamnă că $(51-8)$ jumătăţi kg griş costă $\left(162 - 65\frac{1}{4}\right)$ lei; prin urmare o jumătate kg griş costă:

$$\frac{162 - 65\frac{1}{4}}{51-8} = \frac{387}{4 \cdot 43} = \frac{9}{4}$$ şi deci un kilogram griş costă $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ lei.

Avînd în vedere că 4 kg griş şi $4\frac{1}{2}$ kg biscuiţi costă $65\frac{1}{4}$ lei, rezultă că $4\frac{1}{2}$ kg biscuiţi costă $\left(65\frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{9}{2}\right)$ lei $= 47\frac{1}{4}$ lei, deci un kg biscuiţi costă: $\frac{47\frac{1}{4}}{4\frac{1}{2}}$ lei $= 10\frac{1}{2}$ lei, 1 kg orez costă cît 2 kg griş, adică $2 \cdot \frac{9}{2} = 9$ lei şi 1 kg macaroane costă cît 1 kg biscuiţi mai puţin $4\frac{1}{10}$ lei, adică: $10\frac{1}{2} - 4\frac{1}{10} = 6\frac{2}{5}$ lei.

97. Din datele problemei rezultă că al doilea lot este egal cu $\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{45}{56}$ din primul lot. Diferenţa dintre cele două loturi este deci:

$$\frac{56}{56} - \frac{45}{56} = \frac{11}{56} \text{ din primul lot.}$$

Urmează că primul lot este egal cu:

$$\frac{77 \cdot 56}{11} = 392 \text{ ari,}$$

iar lotul al doilea este: $392 \cdot \frac{45}{56} = 315$ ari.

98. La urmă au fost în fabrică $\frac{5}{8}$ bărbați și $\frac{3}{8}$ femei. Numărul de 2025 reprezintă $\frac{3}{8}$ femei; urmează de aci că numărul muncitorilor era în acest moment $\frac{8 \cdot 2025}{3} = 5400$.

Acest ultim număr reprezintă numărul muncitorilor de la început mărit cu 50%, de unde rezultă că numărul de muncitori era la început egal cu:

$$5400 \cdot \frac{2}{3} = 3600 .$$

Numărul muncitorilor bărbați a fost la început $\frac{4}{5}$ din numărul total, adică $\frac{4}{5} \cdot 3600 = 2880$, iar al femeilor $\frac{1}{5}$, adică $\frac{1}{5} \cdot 3600 = 720$.

99. Primul elev a primit $\frac{4}{17}$ din sumă, al doilea $\frac{5}{17}$ și al treilea $\frac{8}{17}$, $(17 = 4 + 5 + 8)$.

Cele două cărți pe care le cumpără primul elev costă împreună $65\% + 57{,}5\% = 122{,}5\%$ din suma de care dispune, adică mai mult cu 22,5% din ce are în buzunar. Acești 22,5% reprezintă 4,50 lei, deci suma primului elev este de:

$$\frac{4{,}50 \cdot 100}{22{,}5} = 20 \text{ lei.}$$

Cele două cărți costă la un loc $20 + 4{,}5 = 24{,}50$ lei, prima carte costă 13 lei, iar cea de-a doua 11,50 lei.

Primul elev a primit 20 lei, ce reprezintă $\frac{4}{17}$ din întreaga sumă împărțită celor trei elevi. Rezultă de aci că întreaga sumă a fost de $\frac{20 \cdot 17}{4} = 85$ lei.

Al doilea elev a primit $\frac{5}{17} \cdot 85 = 25$ lei, iar al treilea $\frac{8}{17} \cdot 85 = 40$ lei.

100. Rezolvînd ecuaţia în raport cu y, aflăm :

$$y = \frac{x(1 \pm \sqrt{4x^2 - 3})}{2(x^2 - 1)}.$$

Pentru ca y să fie număr întreg, este necesar în primul rînd ca $4x^2 - 3$ să fie un pătrat perfect. Acest lucru se întîmplă numai dacă $x = 1$, pentru că numai primele două pătrate consecutive diferă cu 3, diferenţa următoarelor pătrate consecutive creşte trecînd la 5, 7 etc ...

Introducînd în ecuaţia dată $x = 1$, aflăm $y = -1$.

Acestea sînt singurele valori întregi pentru x şi y, dar nu şi pozitive, care verifică ecuaţia dată.

101. Numărul N este egal cu $10^{49+1+99+1} + 5 \cdot 10^{99+1} + 1$, adică :

$$N = 10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1.$$

Se observă că :

$$(10^{50})^3 < N < (10^{50} + 2)^3.$$

Numărul N ar putea fi doar cubul lui $10^{50} + 1$. Efectuînd $(10^{50} + 1)^3$ obţinem $10^{150} + 3 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50} + 1$ care este o expresie diferită de N. Aşadar acest număr nu poate fi cubul unui număr întreg.

102. Dacă unul din numerele a, b este par atunci produsul $ab(a + b)$, avînd un factor divizibil prin doi, este par.

Dacă ambele numere a, b sînt impare, atunci suma $a + b$ este pară şi prin urmare produsul $ab(a + b)$ este par avînd factorul $a + b$ divizibil prin doi.

103. Dacă notăm cu x baza sistemului de numeraţie, egalitatea propusă devine :

$$4(x + 3) = x^2$$

ale cărei rădăcini sînt $x_1 = -2$ şi $x_2 = 6$.

Deoarece x este baza unui sistem de numeraţie, rezultă că singura valoare acceptabilă este $x = 6$.

În acest sistem cu baza 6, avem :

$$4_6 \cdot 13_6 = 100_6.$$

104. Numărul căutat fiind de patru cifre şi o putere a patra a unui număr n, avem :

$$1000 < n^4 < 10\,000,$$

de unde rezultă $5{,}62 < n < 10$.

Numărul n poate fi deci 6 ; 7 ; 8 ; 9 ale căror puteri a patra sînt respectiv :

$$6^4 = 1296\,;\ 7^4 = 2401\,;\ 8^4 = 4096 \text{ şi } 9^4 = 6561.$$

Singurul număr care corespunde cerinţelor problemei este :

$$2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4.$$

105. Să notăm cu m şi n cele două numere căutate şi cu D cel mai mare divizor comun al lor.

Avem : $m = m'D$ şi $n = n'D$ (unde m' şi n' nu mai au nici un divizor comun, căci altminteri n-ar fi D cel mai mare divizor comun).

Este evident că în acest caz cel mai mic multiplu comun al numerelor m şi n este $M = m'n'D$.

După datele problemei, avem :

$$m + n = m'D + n'D = (m' + n')D = 667 = 23.29 \qquad (1)$$

şi $$\frac{M}{D} = \frac{m'n'D}{D} = m'n' = 120. \qquad (2)$$

Din egalitatea (1) se vede că D nu poate avea decît valorile 1 ; 23 ; 29 ; 667.

Dintr-o sumară analiză se vede că $D = 1$ sau $D = 667$ sînt valori imposibile, dînd pentru m' şi n' valori complexe sau iraţionale.

Pentru $D = 23$ avem $m' + n' = 29$ şi $m'n' = 120$, de unde rezultă $m' = 5$ şi $n' = 24$ sau invers, deci :

$$m = 5.23 = 115 \text{ şi } n = 24 \,.\, 23 = 552.$$

Pentru $D = 29$ avem $m' + n' = 23$ şi $m'n' = 120$, de unde rezultă $m' = 8$ şi $n' = 15$ sau invers,
deci : $m = 8.29 = 232$ şi $n = 15.29 = 435$.

106. Suma primelor n numere naturale este $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ni se cere n astfel ca :

$$\frac{n(n+1)}{2} = aaa = 100\,a + 10a + a = 111a. \qquad (1)$$

Egalitatea (1) se mai scrie şi astfel :

$$n(n+1) = 6a \cdot 37. \qquad (2)$$

Egalitatea (2) este posibilă dacă membrul drept este constituit dintr-un produs de două numere consecutive, adică 36.37 sau $37 \cdot 38$.

Însă produsul 37.38 atrage după sine $6a = 38$, ecuaţie imposibilă dat fiind faptul că a este o cifră, rămîne deci celălalt caz $n(n+1) = 36 \cdot 37 = 6a \cdot 37$, care ne conduce la $6a = 36$ şi prin urmare la $a = 6$; $n = 36$.

Avem deci :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 36 = 666.$$

107. Termenii sumei sînt fiecare de forma fracţiei $\frac{1}{n(n+1)}$ care este diferenţa fracţiilor $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Aşa fiind, suma propusă este echivalentă cu :

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right).$$

După efectuarea reducerilor, obţinem :

$$S = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99.$$

108. Egalitatea se verifică pentru $n = 1$; 2. Să presupunem egalitatea adevărată pentru $n = k$ şi să dovedim că ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Avem deci presupus adevărat :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}. \qquad (1)$$

Să adăugăm la ambii membri ai egalității (1) expresia $(k+1)(k+2)$, obținem:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+$$

$$+(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

De unde rezultă justețea egalității (1) și pentru $n=k+1$.

Formula fiind adevărată pentru $n=1$, pe baza celor arătate mai sus, ea va fi adevărată și pentru $n=2$; fiind adevărată pentru $n=2$ va fi și pentru $n=3$ etc. ...

109. Dacă însemnăm valorile întregi ale celor două monede cu a și b, cu x și y, numărul respectiv de monede ce vom lua din primul și al doilea tip cu condiția ca $x+y=3p$ (p număr întreg), atunci avem simultan următoarele relații:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{3};\ ax+by=ab \text{ și } x+y=3p.$$

Introducem $b=3a$ în relația a doua, de unde obținem (dat fiind că $a\neq 0$) $x+3y=3a$.

Din această ultimă egalitate și $x+y=3p$, deducem:

$$x=\frac{3(3p-a)}{2} \text{ și } y=\frac{3(a-p)}{2}.$$

Numărul y fiind întreg și pozitiv trebuie să avem: $a-p=2k$ și deci $p=a-2k$. Rezultă

$$x=3(a-3k) \text{ și } y=3k,$$

k fiind un întreg oarecare mai mic decît $\frac{a}{3}$.

Exemplu numeric: Dacă $a=5$ și $b=15$

$$x=3(5-3k) \text{ și } y=3k.$$

Putem da lui k numai valoarea 1, atunci $x=6$ și $y=3$. Avem atunci:

$$6\cdot 5+3\cdot 15=5\cdot 15.$$

110. Să notăm cu x şi y cifrele necunoscute pe care să le aşezăm în locurile trei şi cinci. Numărul devine în acest caz:

$$N = 30x0y03 = 3\cdot 10^6 + x\cdot 10^4 + y\cdot 10^2 + 3. \qquad (1)$$

Avem:

$$10^2 = 13\cdot 7 + 9,$$
$$10^4 = 13\cdot 769 + 3,$$
$$10^6 = 13\cdot 76\,923 + 1. \qquad (2)$$

Înlocuind expresiile (2) în (1) obţinem:

$$N = \mathcal{M}13 + 3 + 3x + 9y + 3 = \mathcal{M}13 + 3\,(x + 3y + 2).$$

Pentru ca numărul N să fie divizibil prin 13 este necesar ca $x + 3y + 2$ să fie divizibil prin 13, adică trebuie să avem:

$$x + 3y + 2 = 13\ m. \qquad (3)$$

Avînd în vedere că x şi y sînt cifre, rezultă că valoarea expresiei $x + 3y + 2$ este cel mult egală cu

$$9 + 3\cdot 9 + 2 = 38.$$

Prin urmare trebuie să avem:

$$13\,m \leqslant 38.$$

Numărul m poate avea deci valorile 1 sau 2.

În cazul cînd $m = 1$, ecuaţia (3) devine:

$$x = 11 - 3y$$

care are sens în problema noastră, cînd $0 < 3y < 11$ ceea ce dă:

$$y = 1;\ 2;\ 3 \text{ şi}$$

pentru care avem respectiv: $x = 8;\ 5;\ 2$.

Numerele căutate corespunzătoare acestor soluţii sînt: 3080103; 3050203; 3020303.

Cazul $m = 2$. Ecuaţia (3) devine:

$$x = 3\,(8 - y).$$

Pentru ca această ecuaţie să aibă sens trebuie să avem:

$$0 \leqslant 3\ (8 - y) \leqslant 9$$

de unde rezultă:

$$5 \leqslant y \leqslant 8.$$

Avem soluţii acceptabile pentru $y = 5;\ 6;\ 7$ şi 8, cărora le corespund respectiv $x = 9;\ 6;\ 3$ şi 0.

Numerele căutate sînt în acest caz:

3090503; 3060603; 3030703 şi 3000803.

111. Expresia dată se mai poate scrie astfel:

$$N = 13^n + 6 = 13^n - 6^n + 6^n + 6 = (13^n - 6^n) + 6(6^{n-1} + 1).$$

Avînd în vedere că expresia $x^m - a^m$ se divide întotdeauna prin $x - a$, iar $x^m + a^m$ se divide prin $x + a$ cînd m este impar, rezultă că $13^n - 6^n$ se divide prin $13 - 6 = 7$, iar $6^{n-1} + 1$ se divide prin $6 + 1 = 7$ pentru că $n - 1$ este impar (prin ipoteză s-a dat n egal cu un număr par).

Termenii sumei care-l formează pe N fiind fiecare divizibil prin 7 şi N este un număr divizibil prin 7.

112. Un număr prim impar are forma $N = 2m + 1$.

Numărul acesta fiind prim poate fi scris ca un produs de două numere întregi numai sub forma:

$$N = (2m + 1) \cdot 1.$$

Ţinînd seama de identitatea $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$, avem:

$$N = (2m + 1) \cdot 1 = \frac{(2m + 1 + 1)^2 - (2m + 1 - 1)^2}{4} = (m+1)^2 - m^2,$$

care este o diferenţă de două pătrate.

113. Să considerăm numerele: $M = a^2 + b^2$ şi $N = c^2 + d^2$, care îndeplinesc condiţiile problemei. Să calculăm produsul lor:

$$M.N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Produsul obţinut se mai poate scrie şi astfel, dacă scădem şi adăugăm expresia $2abcd$:

$$MN = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2, \text{ sau:}$$

$MN = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, adică o sumă de două pătrate, ceea ce trebuia dovedit.

114. Să notăm cu m şi n numerele căutate, iar prin D pe cel mai mare divizor comun al lor.

Avem: $m = m'D$ şi $n = n'D$, iar cel mai mic comun multiplu este: $M = m'n'D$.

După datele problemei avem:

$$m' + n' = 18$$

şi: $m'n'D = 975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$.

Ecuația care dă pe m' și n' este :

$$z^2 - 18\,z + \frac{975}{D} = 0.$$

Rădăcinile ei sînt date de $z = 9 \pm \sqrt{81 - \frac{975}{D}}$. (1)

Pentru ca expresia de sub radical să fie pătrat, trebuie ca $\frac{975}{D}$ să fie mai mare sau cel mult egal cu 17 (diferența dintre 81 și cel mai apropiat pătrat 64).

$$\frac{975}{D} \geqslant 17$$

rezultă $D \leqslant \frac{975}{17} = 57$,f. De asemeni trebuie să avem $81 - \frac{975}{D} \geqslant 0$, de unde deducem $D \geqslant 12$, f.

Vom lua deci D egal cu unul din divizorii lui $3 \cdot 5^2 \cdot 13$ cuprins între 12, f și 57, f, adică $D = 13$; 15 ; 25 sau 39. Introducînd în (1) aceste valori găsim ca valoare acceptabilă numai $D = 15$ pentru care avem $m' = 5$ și $n' = 13$. De unde rezultă :

$$m = 75 \text{ și } n = 195.$$

115. Suma a două numere naturale consecutive este :

$$n + (n+1) = 2n + 1,$$

iar suma pătratelor lor este :

$$n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1. \qquad (1)$$

Să dovedim că cel mai mare divizor comun al expresiilor $2n^2 + 2n + 1$ și $2n + 1$ nu poate fi decît 1.

Notăm cu D pe cel mai mare divizor comun ; deoarece D divide pe fiecare din epresiile (1), rezultă că el va divide și diferența lor : $(2n^2 + 2n + 1) - (2n + 1) = 2n^2$.

Observăm deci că D divide $2n + 1$ și $2n^2$; prin urmare și diferența $n(2n + 1) - 2n^2 = n$.

Avînd în vedere că D divide $2n + 1$ și n, va divide și diferența $2n + 1 - 2 \cdot n = 1$, deci cel mai mare divizor comun D divide 1, prin urmare $D = 1$.

Cele două expresii (1) sînt deci prime între ele.

116. În primele n linii sînt scrise numerele şirului natural conţinînd un număr total de termeni egal cu :

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Ultimul termen al rîndului de rangul n este deci n^2 şi prin urmare ultimul termen de pe rîndul de rangul $n-1$ este $(n-1)^2$.

Rezultă că primul termen al liniei $a\ n^{-a}$ este $(n-1)^2 + 1$, adică :

$$n^2 - 2n + 2.$$

Cunoaştem astfel primul termen $a = n^2 - 2n + 2$ şi ultimul termen n^2 al progresiei aritmetice de pe linia n^{-a} cu $2n-1$ termeni. Suma termenilor acestei linii este deci :

$$\frac{(a + l)(2n - 1)}{2} = \frac{(2n^2 - 2n + 2)(2n - 1)}{2} = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 =$$

$$= n^3 + (n-1)^3.$$

Formula liniei $a\ n^{-a}$ este deci :

$(n^2-2n+2) + (n^2-2n+3) + (n^2 - 2n + 4) + \ldots + n^2 =$
$= (n-1)^3 + n^3$.

117. Aducînd fracţiile la acelaşi numitor şi descompunînd numărătorul în factori, obţinem :

$$S = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}.$$

Numărătorul fiind un produs de trei numere întregi consecutive este divizibil atît prin 2 cît şi prin 3, deci prin 6.

Rezultă că S este un număr întreg.

118. Expresia dată se mai poate scrie astfel :

$$E = (2^5)^{11} + 1 = 32^{11} + 1.$$

Avînd în vedere că $x^m + a^m$ se divide prin $x + a$ atunci cînd m este un număr impar, rezultă că şi $E = 32^{11} + 1$ se divide prin $32 + 1 = 33$; prin urmare şi prin 11.

119. Minutarul descrie într-un minut un unghi de 6°, iar arcul orar descrie un unghi de 0°,5. În fiece minut acul minutar se apropie de cel orar cu $(6-0,5)° = 5°,5$. Pentru a acoperi diferenţa de unghi de $4 \cdot 30° = 120°$ sînt deci necesare :

$$120 : 5,5 = 21^m\ 49^s.$$

Aşadar, acul minutar întîlneşte pe cel orar la $4^h\,21^m\,49^s$.

120. Să notăm numărătorul necunoscut cu n. Trebuie să avem:

$$\frac{4}{13} < \frac{n}{20} < \frac{5}{13}.$$

Înmulţind peste tot cu 20, obţinem:

$$\frac{80}{13} < n < \frac{100}{13},$$

sau:

$$6\,\frac{2}{13} < n < 7\,\frac{9}{13}.$$

Singurul număr întreg care satisface ultima dublă neegalitate este $n = 7$ şi prin urmare fracţia căutată este $\frac{7}{20}$.

Se poate lesne verifica că:

$$\frac{4}{13} < \frac{7}{20} < \frac{5}{13}.$$

121. Faţă de divizorul 6, numerele pot fi de forma:

$$6k;\ 6k+1;\ 6k+2;\ 6k+3;\ 6k+4;\ 6k+5.$$

Dintre acestea, $6k$; $6k+2 = 2(3k+1)$; $6k+3 = 3(2k+1)$, $6k+4 = 2(3k+2)$ nu sînt prime (numai 2 şi 3 fac excepţie). Rezultă că orice număr prim mai mare decît 3 nu poate fi decît de forma:

$$6k+1 \text{ sau } 6k+5 = 6(k+1) - 1 = 6k' - 1.$$

Să considerăm acum trei numere prime p_1, p_2, p_3 mai mari decît 3, în progresie aritmetică. Să arătăm că raţia progresiei este divizibilă prin 6.

Numerele p_1, p_2, p_3, în ordine crescîndă, fiind în progresie aritmetică, avem

$$2p_2 = p_1 + p_3. \qquad (1)$$

Din relaţia (1) putem constata că p_1 şi p_3 sînt simultan de forma $6k+1$ sau $6k-1$.

Nu e posibil ca $p_1 = 6k + 1$, iar $p_3 = 6k' - 1$ sau invers $p_1 = 6k - 1$ şi $p_3 = 6k' + 1$ pentru că în aceste cazuri am avea $2p_2 = 6\,(k + k')$ ceea ce ar însemna că p_2 să fie divizibil, prin 3, adică n-ar fi prim.

Deci trei numere prime în progresie aritmetică au formele :

$$6k + 1\,;\, 3(k + k') + 1\,;\, 6k' + 1$$

sau : $$6k - 1\,;\, 3(k + k') - 1\,;\, 6k' - 1,$$

a căror raţie într-un caz sau altul este $r = 3(k' - k)$, care este evident divizibilă prin 3. Însă raţia mai este divizibilă şi prin 2 fiind diferenţa a două numere prime (care sînt impare ele fiind mai mari ca 3), rezultă deci că raţia este divizibilă prin 6.

122. Termenul general al sumei se transformă astfel :

$$\underbrace{111\ldots.111}_{\text{de } n \text{ ori}} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9},$$

iar suma devine după înlocuirea fiecărui termen după forma termenului general :

$$S = \frac{10 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \ldots . \frac{10^n - 1}{9},$$

sau : $9\,S = (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - n = 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n$

şi apoi : $S = \frac{10 \cdot \overbrace{111\ldots.11}^{\text{de } n \text{ ori}} - n}{9}$.

123. Se observă că fracţia $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ este egală cu $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$, astfel încît suma propusă devine egală cu expresia :

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

sau : $$S = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}.$$

124. Avem :

$$N = a^7 - a = a(a-1)(a+1)(a^2 - a+1)(a^2 + a + 1),$$

iar $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Demonstrăm că N este divizibil cu factorii 2; 3 şi 7. În componenţa lui N intră factorii consecutivi $a-1$, a, $a+1$. Unul din aceştia este divizibil cu 2 şi tot unul din factori e divizibil cu 3, deci N este divizibil prin factorii 2 şi 3. Să arătăm că N este divizibil cu 7. Cînd a este divizibil prin 7 acest lucru este evident. Dacă a este prim cu 7 el are una din formele : $7m \pm 1$; $7m \pm 2$; $7m \pm 3$.

Avînd în vedere că $N = a(a^6 - 1)$, observăm că pentru fiecare formă de mai sus :

$$a^6 - 1 = \mathcal{M}7 \text{ şi prin urmare } N = \mathcal{M}7.$$

Cu aceasta am dovedit că $a^7 - a$ este divizibil prin 42 orice valoare întreagă ar avea a.

125. Dacă notăm cu N^{2p} puterea pară, atunci conform enunţiului avem :

$$3005 \leqslant N^{2p} \leqslant 3995.$$

Rezultă deci :

$$\sqrt{3005} \leqslant N^p \leqslant \sqrt{3995},$$

sau :

$$55 \leqslant N^p \leqslant 63. \qquad (1)$$

Pentru că puterea pară are terminaţia 5 rezultă că şi N^p trebuie să fie un număr ce se termină cu 5. Dintre numerele care satisfac condiţia (1) nu există altul în afara lui 55. Aşa dar soluţia problemei este :

$$N^{2p} = 3025$$

unde : $N = 55$ şi $p = 1$.

126. Să notăm cu x şi y cele două fracţii. Conform problemei trebuie să avem :

$$x - y = xy.$$

Rezultă : $$y = \frac{x}{1+x} \qquad (1)$$

Dacă notăm acum: $x = \frac{a}{b}$ şi $y = \frac{a'}{b'}$, deducem din (1):

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{a+b},$$

formulă care ne indică forma celor două fracţii care să corespundă cerinţelor problemei:

$$\frac{a}{b} \text{ şi } \frac{a}{a+b}.$$

127. Să aşezăm numerele şirului natural într-un triunghi aritmetic care cuprinde pe fiecare linie tocmai grupele despre care se vorbeşte în enunţ. Pentru a arăta că suma termenilor unei grupe este un cub, să calculăm primul şi ultimul termen din linia de rangul n. Primele $n-1$ rînduri cuprind $1+2+3+\ldots.+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ termeni, iar primele n rînduri cuprind $\frac{n(n+1)}{2}$ termeni.

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
. . . .
. . . .

Numărul $\frac{n(n-1)}{2}+1$ este rangul termenului cu care începe rîndul de rangul n din progresia care începe cu 1 şi are raţia 2, iar $\frac{n(n+1)}{2}$ este rangul termenului cu care se termină acelaşi rînd. Rîndul de rangul n are n termeni în progresie aritmetică cu raţia 2. Dacă notăm cu a_1 şi a_n primul şi ultimul termen al rîndului de rang n, avem:

$$a_1 = 1 + \left[\frac{n(n-1)}{2} + 1 - 1\right] \cdot 2 = n^2 - n + 1$$

(pentru că a_1 este termenul de rangul $\frac{n(n-1)}{2}+1$ din progresia aritmetică care începe cu 1 şi are raţia 2):

$$a_n = 1 + \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] \cdot 2 = n^2 + n - 1.$$

Deci suma termenilor rîndului de rang n este :

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(n^2-n+1+n^2+n-1)n}{2} = n^3,$$

ceea ce trebuia dovedit.

128. Să notăm cifrele necunoscute cu a, b, c, d şi să extragem rădăcina pătrată din n pe baza algoritmului cunoscut. Avem :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{12\,1a\,bc\,d5} & 34 \\ \underline{9} & \underline{64.4} \\ 31a & 68 \\ \underline{256} & \\ \cdots & \end{array}$$

Dacă $a \geqslant 6$ al doilea rest parţial şi cu cifrele bc coborîte va avea forma $6e\,b\,c$, iar dacă $a < 6$, atunci acest rest parţial cu cifrele bc coborîte are forma $5fbc$.

Rezultă că cea mai mică valoare posibilă la al doilea rest parţial este 54 bc, iar cea mai mare valoare 63 bc. A treia cifră a rădăcinii ar putea deci fi cîtul dintre

$54b$ sau $63b$ prin 68.

Rezultă de aci că această cifră este 7 ; 8 sau 9.

Cifra a patra a rădăcinii nu poate fi decît 5 pentru că pătratul numărului se termină cu 5.

Prin acest raţionament constatăm că rădăcina numărului dat nu poate fi decît unul din următoarele trei :
3475 ; 3485 sau 3495.

Ridicînd aceste trei numere la pătrat constatăm că singurul posibil este 3485 pentru că :

$$3485^2 = 12145225.$$

Cele 4 cifre necunoscute sînt 4, 5, 2, 2.

129. Avem $E = n^5 - n = (n-1)\,n\,(n+1)(n^2+1)$.

Primii trei factori ai expresiei E sînt trei numere întregi consecutive $n-1$, n, $n+1$. Unul din ei este negreşit par, iar unul trebuie să fie divizibil prin 3, rezultă deci că $(n-1)\,n\,(n+1)$ este divizibil prin 6.

Faţă de divizorul 5, n poate avea una din aceste forme :

$5k$; $5k+1$; $5k+2$; $5k+3$; $5k+4$.

Înlocuind în $(n-1)\,n\,(n+1)$ una din formele $5k$; $5k+1$ sau $5k+4$ constatăm că produsul este divizibil prin 5, iar în cazul cînd n are forma $5k+2$ sau $5k+4$ este uşor de văzut că n^2+1 este divizibil prin 5. Deci în orice caz numărul E e divizibil prin 5.

Cum am constatat că E este divizibil şi prin 6, rezultă că n^5-n este divizibil prin $5\cdot 6=30$.

130. După datele problemei, cifrele pătratului, citite de la stînga la dreapta, trebuie să fie:

$$n,\ n-1,\ n+1,\ n+2,$$

ar valoarea numărului pătrat perfect este în acest caz:

$N^2=1000n+100(n-1)+10\,(n+1)+n+2=$
$=1111n-88$, sau: $N^2=11\,(101n-8)$.

Avînd în vedere că N^2 se divide prin 11, rezultă că el trebuie să se dividă prin 11^2. Urmează deci că:

$$E=101n-8$$

trebuie să se dividă prin 11.

Pentru a găsi această condiţie transcriem pe E astfel:
$E=99N+2n-8=99N+2(n-4)$.

Rezultă din această formă că E este divizibil prin 11 atunci cînd $n-4$ este divizibil prin 11, de unde rezultă că $n=4$, 15 etc ... Dar n fiind o cifră, nu putem lua decît $n=4$.

Numărul căutat este 3456 iar pătratul este:

$$N^2=4356=66^2.$$

131. Notăm baza sistemului de numeraţie cu x.

În conformitate cu datele problemei trebuie să avem:
1. $x^4+6x^3+3x^2+2x+4=(1\cdot x^2+2x+5)^2$.

După reduceri obţinem egalitatea:

$$2x^3-11x^2-18x-21=0. \qquad (1)$$

Această egalitate se mai poate scrie şi astfel:

$$2x^2-11x-18=\frac{21}{x}, \qquad (2)$$

de unde rezultă că 21 trebuie să fie divizibil prin x pentru că membrul stîng este un număr întreg (x este întreg şi pozitiv fiind baza unui sistem de numeraţie).

Tot din (2) avem:

$$x(2x - 11) - 18 = \frac{21}{x}, \qquad (3)$$

de unde reiese că $2x > 11$, pentru că altminteri pentru un x pozitiv membrul stîng ar fi un număr negativ, pe cînd cel drept un număr pozitiv, ceea ce este evident imposibil.

Deducem prin acest raţionament că x poate fi 7 sau 21. Încercăm $x = 7$ şi constatăm că el verifică egalitatea (3). Aşadar baza căutată este 7, avem:

$$16324_7 = 125_7^2.$$

132. Expresia dată se poate scrie astfel:

$$E = 3^2 \cdot (3^2)^n - 9 - 8n = 9(9^n - 1) - 8n.$$

Deoarece $9^n - 1 = (9 - 1)(1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{n-1})$, expresia devine:

$E = 8(9 + 9^2 + \cdots + 9^n - n)$. Pe aceasta o transcriem în forma următoare:

$E = 8[(9-1) + (9^2-1) + \ldots + (9^n - 1)]$.

Descompunem în factori fiecare paranteză, după care obţinem:

$E = 64[1+(1+9)+(1+9+9^2)+\cdots+(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})] =$
$= 64[n + (n-1)9 + (n-2)9^2 + (n-3)9^3 + \ldots + 1 \cdot 9^{n-1}]$.

Din rezultatul obţinut se vede că E este divizibil prin 64 şi cine este cîtul ei prin acest număr.

133. Presupunem formula adevărată pentru $n = k$, adică avem:

$1!1 + 2!2 + \cdots + k!k = (k+1)! - 1$.

Să arătăm că ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Adăugăm la ambii membri ai relaţiei (1) pe $(k+1)!\,(k+1)$, obţinem:

$1!1 + 2!2 + \ldots + k!k + (k+1)!\,(k+1) = (k+1)! - 1 +$
$+ (k+1)!\,(k+1) = (k+1)!\,(k+1+1) - 1 = (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1$.

Rezultatul obţinut demonstrează că dacă formula este adevărată pentru $n = k$, ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Cum formula este adevărată pentru $n = 1 (1!1 = 2! - 1)$, pentru $n = 2$, $(1!1 + 2!2 = 3! - 1)$ rezultă că aceeaşi formulă este adevărată pentru $n = 3; 4 \ldots$ etc., adică pentru orice n.

PARTEA a II-a

GEOMETRIE

134. *Prima soluție.* Dacă notăm cu a perpendiculara din vîrful A pe latura $\overline{BC}$ și cu b perpendiculara din vîrful A pe latura $\overline{CD}$, aria paralelogramului $ABCD$ este : $S = 15.\ a = 9b$.

Rezultă că :

$$a = \frac{9.b}{15} = \frac{3}{5} \cdot b.$$

Aria triunghiului AMB este :

$$\frac{5.a}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot b = \frac{3}{2} b,$$

iar aria triunghiului AND :

$$\frac{3.b}{2} = \frac{3}{2} b.$$

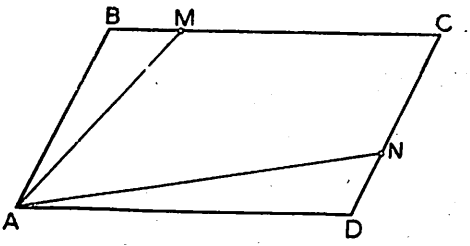


Fig. 4

Cele două triunghiuri au arii egale.

Soluția a doua : Ducînd diagonala $\overline{AC}$, se observă că triunghiul ABM are baza egală cu $\frac{1}{3}$ din baza triunghiului ABC. Avînd aceeași înălțime, rezultă că aria triunghiului ABM este egală cu $\frac{1}{3}$ din aria triunghiului ABC, adică cu $\frac{1}{6}$ din aria paralelogramului. În același mod se arată că și aria triunghiului AND este egală cu $\frac{1}{6}$ din aria paralelogramului. A avut dreptate conducătorul detașamentului 2 ; cele două parcele au arii egale (vezi fig. 5).

135. Aflăm în primul rînd, mărimea înălțimii $\overline{AM}$ și a laturilor egale $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$. Latura $\overline{AM} = (1200 \cdot 2) : 60 = 40$ m (vezi fig. 6).

$$\overline{AB} = \overline{AC} = (160 - 60) : 2 = 50 \text{ m}$$

În același mod aflăm, înălțimea $\overline{MD}$ din triunghiul AMC, cu aria 600 m². Segmentul $\overline{MD} = (600 \cdot 2) : 50 = 24$ m. Dar $\overline{ME} = \overline{MD}$

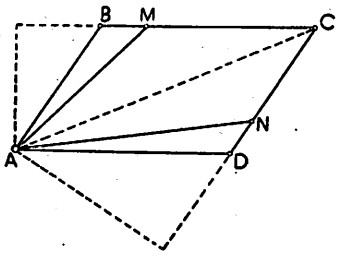


Fig. 5

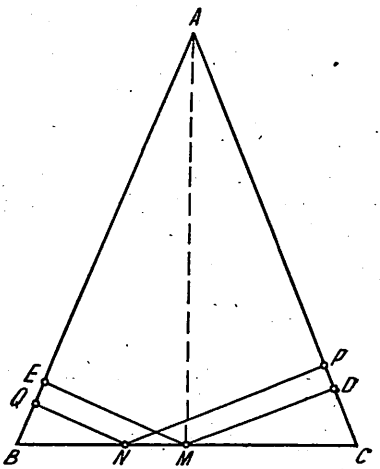


Fig. 6

$= 24$ m, deci șanțurile săpate de primul grup au lungimea totală de $24 \cdot 2 = 48$ m. Triunghiul ABN cu baza $\overline{BN} = 60 : 3 = 20$ m, are aria egală cu $(20 \cdot 40) : 2 = 400$ m², iar triunghiul ANC are aria sa de 800 m². Calculăm ca mai înainte lungimile șanțurilor $\overline{NP}$ și $\overline{NQ}$. Avem $\overline{NP} = (800 \cdot 2) : 50 = 32$ m, $\overline{NQ} = (400 \cdot 2) : 50 = 16$ m. Al doilea grup a săpat deci: $32 + 16 = 48$ m de șanț, adică tot atît cît și primul grup de pionieri.

136. Se poate construi dreapta prin mai multe metode:

1. *Prin translație*: Cu toate că punctul M a fost îndepărtat se poate construi dreapta MP, dacă vom găsi un segment de dreaptă care să fie egal și paralel cu $\overline{MP}$. Gîndiți-vă că într-un pătrat, într-un dreptunghi, sau într-un paralelogram putem obține

astfel de segmente paralele și egale. Dacă notăm cu N (fig. 7) punctul unde dreapta oarecare AM întîlnește marginea hîrtiei după ce s-a făcut tăietura, vom putea construi prin acest punct un segment paralel și egal cu $\overline{MP}$. Trebuie numai să găsim celălalt capăt al acestui segment, punctul S. Aceasta e simplu : Ducem din M (fig. 8) segmentul $\overline{MQ} = 5$ cm perpendicular pe $\overline{NB}$ iar din P o paralelă la AM (anume PT) și o perpendiculară pe marginea hîrtiei opusă punctului M (anume PD). Luăm pe dreapta PD un segment de 5 cm ($\overline{PR}$). Din R ducem perpendiculara pe DP care întîlnește dreapta PT în punctul S. S-au format două triunghiuri egale, PRS și MQN, în care $\overline{PS}$ e egal și paralel cu $\overline{MN}$, deci și $\overline{SN}$ va fi egal și paralel cu $\overline{MP}$. În fond nu s-a făcut altceva decît s-a dat o mișcare de translație segmentului $\overline{MP}$ pînă a întîlnit dreapta NS. 2. *Prin simetrie* : Se taie și din marginea hîrtiei opusă punctului M tot o fîșie de 5cm. Ceea ce rămîne din hîrtie se împarte în două, obținîndu-se astfel o axă de simetrie. Se mută astfel toată construcția în jumătatea de hîrtie opusă punctului M și se construește o dreaptă $M'P'$ simetrică cu MP (vezi figura 9).

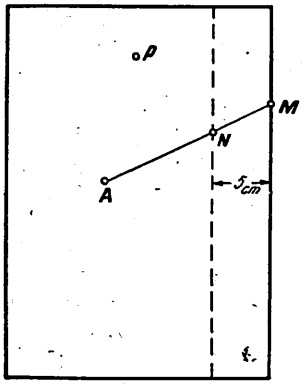


Fig. 7

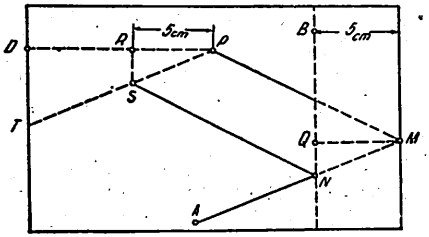


Fig. 8

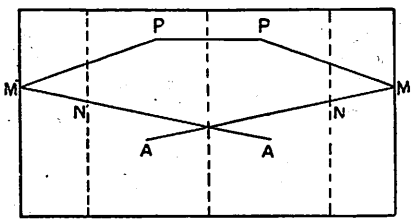


Fig. 9

137. În 60^m acul mic parcurge $30°$, prin urmare în 50^m el va descrie un unghi de $25°$. Rezultă deci că acele vor forma la 2 fără 10 un unghi de :

$$2.30° + 30° + 25° = 115°.$$

138. Fig. a. Nu se poate ca unghiul exterior marcat să fie de $102°$ de vreme ce un unghi interior este de $105°$ (fig. 10).

Fig. b. Nu este posibil ca baza să fie de 76 cm, pentru că într-un triunghi fiecare latură este mai mică decît suma celorlalte două ; or, se observă că $76 > 12 + 11{,}3$.

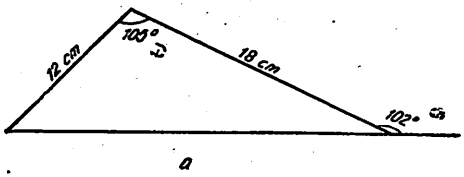
Fig. c. Linia din interiorul unghiului este bisectoare, pentru că desface unghiul de la vîrf în două unghiuri de cîte $20°$. Distanţele de la un punct de pe bisectoare la laturile unghiului sînt marcate cu 29 cm şi 28 cm, ceea ce nu se poate.

Fig. d. După dimensiunile laturilor, triunghiul este isoscel şi perpendiculara dusă din vîrf ar fi trebuit să desfacă unghiul în două părţi egale. Pe figură nu se întîmplă aşa, unghiurile marcate sînt neegale ($27°$ şi $28°$) ceea ce este imposibil.

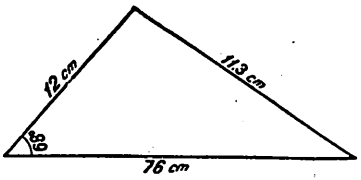
Fig. e. Al treilea unghi al triunghiului este de $73°$. În faţa unghiului de $65°$ este latura de 6,3 cm sau 6,2, iar în faţa unghiului de $73°$ se află 5, 4 cm, ceea ce nu este posibil.

139. Elevii care şi-au propus să construiască triunghiul isoscel au fost nevoiţi să se gîndească că a treia latură ar putea fi de 12 cm sau de 25 cm, pentru ca triunghiul ce se va construi să aibă două laturi egale. Toţi acei care au încercat să construiască triunghiul cu laturile 12 ;12 ;25 nu au reuşit pentru că un astfel de triunghi nu există. Aşa se explică că a doua zi toţi elevii au adus cîte un triunghi cu laturile 12 ; 25 ; 25 ; şi prin urmare toate triunghiurile aduse au fost egale.

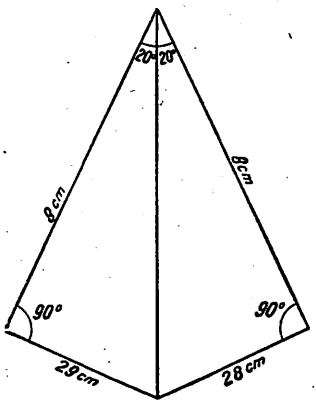
140. Prin ipoteză avem $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, înălţimile $\overline{AD}$ şi $\overline{A'D'}$ egale ; de asemenea egale sînt şi medianele $\overline{AM}$, $\overline{A'M'}$ (fig. 11). Triunghiurile dreptunghice ADM şi $A'D'M'$ sînt egale avînd cîte o catetă egală. ($\overline{AD} = \overline{A'D'}$) şi ipotenuzele egale ($\overline{AM} = \overline{A'M'}$), rezultă $\widehat{AMD} = \widehat{A'M'D'}$ şi $\widehat{AMC} = \widehat{A'M'C'}$. Triunghiurile AMC şi $A'M'C'$ au $\overline{AM} = \overline{A'M'}$; $\overline{MC} = \overline{M'C'} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{B'C'}}{2}$ şi $\widehat{AMC} = \widehat{A'M'C'}$, deducem $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Tot astfel se demonstrează că $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ din egalitatea triunghiu-


12 cm
103°
18 cm
102°

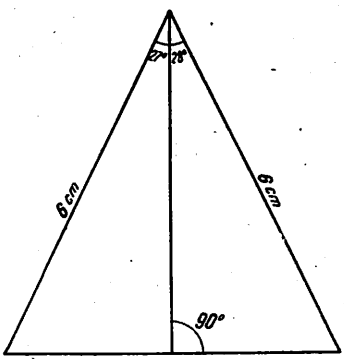
a


12 cm
113 cm
89°
76 cm

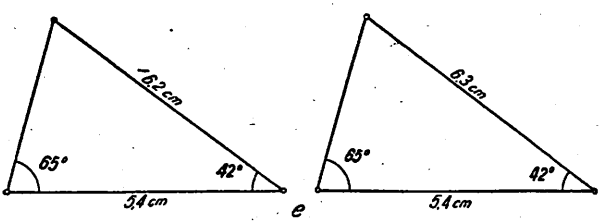
b


20°
20°
8 cm
8 cm
90°
90°
29 cm
28 cm

c


6 cm
6 cm
90°

d


62 cm
65°
42°
54 cm
63 cm
65°
42°
54 cm

e

Fig. 10

rilor AMD și $A'M'D'$. Cele două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, avînd laturile unuia respectiv egale cu ale celuilalt, sînt egale.

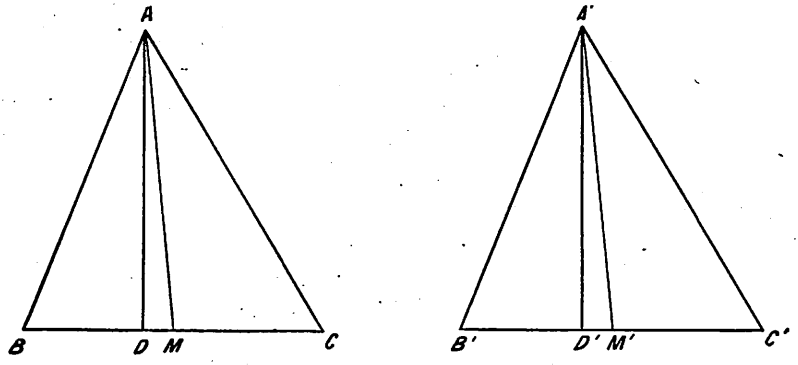


Fig. 11

141. Să comparăm lungimile șoselelor din cele două proiecte (fig. 12).

Avem : $\overline{BD} < \overline{AB} + \overline{AD}$ și tot $\overline{BD} < \overline{BC} + \overline{CD}$.

Rezultă : $2\overline{BD} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = P$

și prin urmare : $\overline{BD} < \frac{P}{2}$. La fel găsim că $\overline{AC} < \frac{P}{2}$.

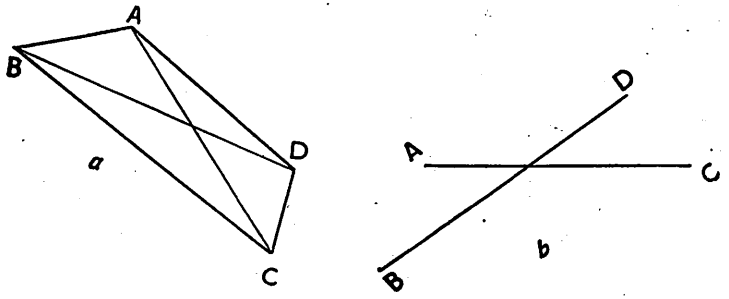


Fig. 12

Adunînd membru cu membru cele două neegalități de același sens avem :

$$\overline{BD} + \overline{AC} < \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}.$$

Urmează de aci că lungimea şoselelor din proiectul b este mai mică ca în proiectul a.

142. Presupunem podul construit în poziţia MN (fig. 13). Prin înţelegerea celor două sfaturi trebuie să avem $\overline{NB} = \overline{MA}$, A şi B reprezintă locurile centrale ale celor două comune de la care măsurăm distanţele pînă la capetele podului. Simetricul B', a punctului B faţă de axa Ox a canalului, este depărtat de M tot atît ca şi B de N.

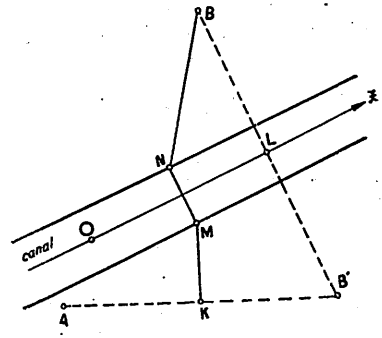


Fig. 13

Rezultă de aci că punctul M este egal depărtat de A şi B', el este deci situat pe mediatoarea segmentului $\overline{AB'}$.

Construcţiile geometrice după analiza făcută mai sus sînt deci următoarele. Se duce perpendiculara din B pe Ox care taie axa în L. Purtăm apoi în prelungire pe această perpendiculară segmentul $\overline{LB'} = \overline{BL}$. Punctul B' obţinut este simetricul lui B faţă de Ox. Unim A cu B' şi în mijlocul segmentului $\overline{AB'}$, ridicăm perpendiculara KM care taie malul dinspre A în punctul M. Prin ducerea perpendicularei MN pe axa Ox se determină poziţia podului în condiţiile problemei.

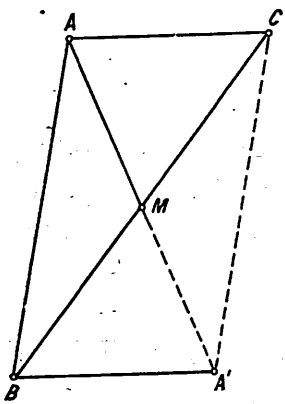


Fig. 14

143. Prelungim $\overline{AM}$ cu segmentul egal $\overline{MA'}$. Triunghiul format ACA' (fig. 14) are ca laturi pe $\overline{AC}$ şi $\overline{CA'} = \overline{AB}$. Unghiurile opuse acestor laturi sînt respectiv $\widehat{AA'C}$ $(= \widehat{MAB})$ şi $\widehat{MAC}$ pentru că patrulaterul $ACA'B$ este un paralelogram. Deoarece avem prin ipoteza $\overline{CA'}\,(= \overline{AB}) > \overline{AC}$, rezultă că $\widehat{MAC} > \widehat{MAB}\,(= \widehat{AA'C})$ căci la latura mai mare se opune unghiul mai mare.

144. Deoarece înălțimile $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ sînt perpendiculare pe laturile unghiului C (fig. 15), rezultă că unghiurile acestor drepte sînt egale cu C și cu $180-C$.

În cazul particular cînd $A = 64°28'$, $B = 53°43'$, avem $C = 61°49'$, $180° - C = 118°11'$, deci unghiurile înălțimilor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ sînt egale cu:

$$61°\ 49'\ \text{și}\ 118°\ 11'.$$

145. Unghiul DAE format de latura $\overline{AD}$ a dreptunghiului

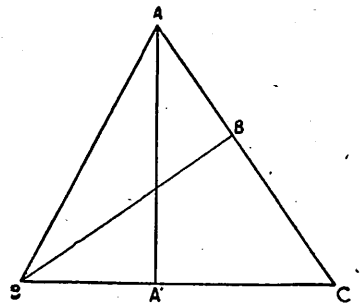


Fig. 15

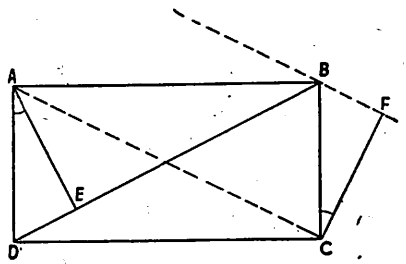


Fig. 16

(fig. 16) cu perpendiculara lăsată din A pe diagonala $\overline{DB}$ este egal cu unghiul BDC ca avînd laturi perpendiculare. Rezultă de aci că $\widehat{DAE} = \widehat{ACD} = \widehat{BCF}$. Ultimele două unghiuri sînt egale ca avînd CF perpendiculară pe paralela din B la diagonala AC și deci și pe AC, iar $CB \perp DC$.

Triunghiurile dreptunghice ADE și BCF au ipotenuzele egale $(\overline{AD} = \overline{BC})$ și cîte un unghi ascuțit la fel de mare $(\widehat{DAE} = \widehat{BCF})$ ele sînt deci egale, de unde rezultă $\overline{AE} = \overline{CF}$ ceea ce trebuia dovedit.

146. Avem $\widehat{BFD} = \widehat{AFE} = 90° - \widehat{FAE}$, deoarece triunghiul AFE este dreptunghic, BE fiind înălțime (fig. 17).

Din cauză că AD este bisectoare, unghiul FAE este jumătate din unghiul A.

Rezultă :

$$\widehat{BFD} = 90° - \frac{A}{2} = 90° - \frac{180° - (41° + 69°)}{2} = 90° - 35° = 55°.$$

147. Bisectoarea interioară BD (fig. 18) şi cea exterioară BE sînt perpendiculare între ele. Cum BD este perpendiculară pe AC pentru că triunghiul ABC este isoscel ($\overline{AB} = \overline{BC}$), rezultă că BE este paralelă cu AC. Patrulaterul $ABEC$ avînd două laturi

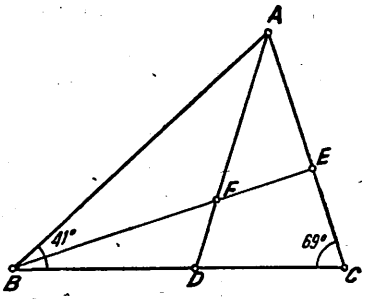


Fig. 17

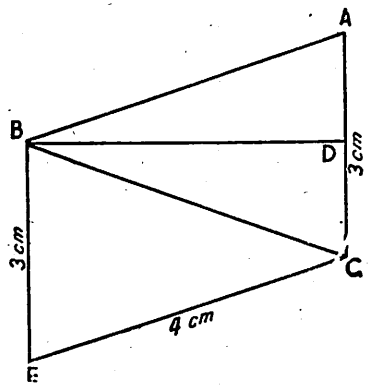


Fig. 18

opuse $\overline{AC}$ şi $\overline{BE}$ paralele şi egale, rezultă că este un paralelogram. Deducem :

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{EC} = 4 \text{ cm}$$

şi prin urmare perimetrul triunghiului ABC este :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 4 + 4 + 3 = 11 \text{ cm}.$$

148. Ducem înălţimea CE pe latura AB (fig. 19). Precum se ştie, această înălţime împarte latura opusă în părţi egale. Patrulaterul $AECD$ fiind dreptunghi, avem $\overline{CD} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

149. Admitem că un poligon cu n laturi ar putea fi tăiat în paralelograme. Cum orice latură a poligonului va fi o latură a unui paralelogram, iar latura opusă a paralelogramului obţinut va fi şi ea latură a altui paralelogram etc., urmează că

laturile poligonului sînt paralele două cîte două (3 laturi ale poligonului nu pot fi paralele, el fiind convex); rezultă că poligonul are un număr par de laturi şi că numai poligoane cu un număr par de laturi pot fi desfăcute în paralelograme. În problema noastră avem $n = 13$, ca atare acest poligon nu poate fi descompus în paralelograme.

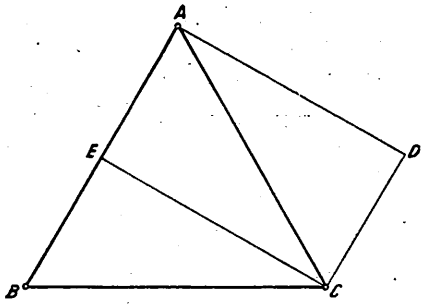


Fig. 19

150. Să considerăm semicercurile descrise pe $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ ca diametre (fig. 20). Ele se taie în A şi M. Triunghiurile BMA şi CNA fiind înscrise în semicercuri sînt dreptunghice cu unghiurile drepte în M.

Avem deci $\widehat{BMA} + \widehat{CMA} = 180°$. Rezultă de aci că BM şi MC sînt în prelungire, ceea ce dovedeşte că semicercurile se intersectează pe latura a treia.

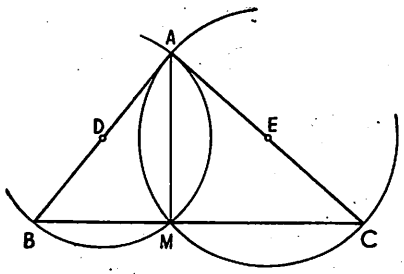


Fig. 20

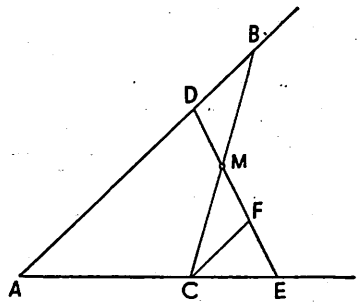


Fig. 21

Observare. Intersecţia are loc pe prelungirea laturii a treia, atunci cînd unghiul B sau C este obtuz.

151. Construim două segmente ce trec prin M, unul $\overline{BC}$ pentru care M este mijlocul său, iar un altul $\overline{DE}$, oarecare. Ducem prin C o paralelă la DB (fig. 21), se formează triunghiurile egale DMB şi MCF pentru că M este mijlocul segmentului

$\overline{BC}$. De aci deducem că aria oricărui triunghi ADM este mai mare decît aria triunghiului ABC. Într-adevăr, avem : aria ADE = aria ABC — aria DMB + aria CMF + aria CFE sau aria ADE = aria ABC + aria CFE, din cauză că aria DMB = aria CMF, aşa cum s-a arătat mai sus.

Urmează deci că aria minimă este aceea a triunghiului ABC care corespunde cazului cînd M este mijlocul segmentului BC.

Pentru a-l trasa atunci cînd M este dat, luăm simetricul A' al lui A faţă de M (fig. 22) apoi ducem din A' paralele la laturile unghiului care le taie pe acestea în B şi C. Segmentul $\overline{BC}$ este acela pentru care triunghiul ABC are aria minimă.

152. Segmentul $\overline{AB}$ ce se mişcă cu extremităţile sale pe dreptele perpendiculare Ox şi Oy (fig. 23) are lungimea constantă l. Mediana $\overline{MO}$ corespunzătoare ipotenuzei $\overline{AB}$ este egală în lungime cu jumătatea ipotenuzei, urmează că M rămîne mereu la aceeaşi distanţă $\frac{l}{2}$ de O, iar $\overline{GO}$ care uneşte centrul de greu-

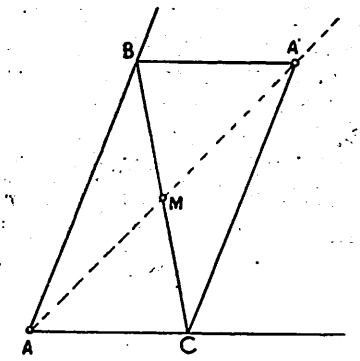


Fig. 22

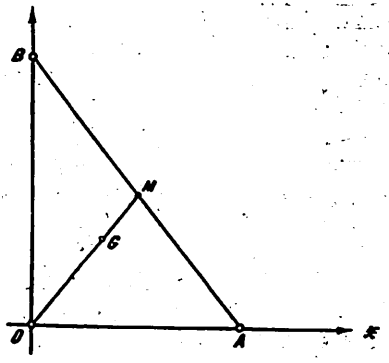


Fig. 23

tate G al triunghiului OAB este egal cu $\frac{2}{3}$ din $\overline{MO}$, rezultă deci :

$$\overline{GO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3}.$$

De aci deducem că locul lui G este un cerc cu centrul în O și cu rază $\frac{1}{3}$ din l.

153. Triunghiurile BCE și ACD (fig. 24) sînt egale pentru că avem $\overline{CE} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{AC}$ și $\widehat{BCE} = \widehat{ACD} = 120°$. Rezultă că și medianele $\overline{CM}$ și $\overline{CN}$ corespunzătoare laturilor egale $\overline{AD}$ și $\overline{BE}$ sînt de asemeni egale. Unghiul MCN este de 60° pentru că dacă rotim triunghiul ACD în jurul lui C, el se suprapune peste BCE după o rotație de 60°. Deducem că triunghiul MCN este echilateral, deoarece are un unghi de 60° cuprins între două laturi egale ($\overline{MC} = \overline{NC}$).

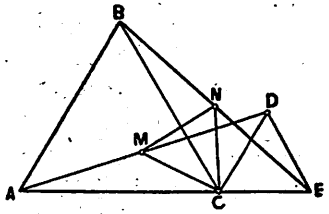


Fig. 24

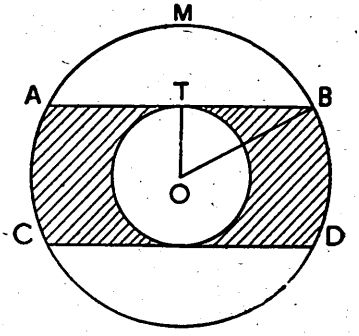


Fig. 25

154. Dacă notăm cu r raza cercului mic (fig. 25) și cu R raza cercului mare, avem pe baza datelor problemei:

$$\pi(R^2 - r^2) = \pi r^2,$$

de unde rezultă: $R = r\sqrt{2}$.

Lungimea unei tangente la cercul mic, limitată de cercul mare este egală cu:

$$\overline{AB} = 2\overline{TB} = 2\sqrt{OB^2 - OT^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2r = R\sqrt{2},$$

ceea ce înseamnă că $\overline{AB}$ este latura pătratului înscris în cercul mare.

Așa fiind, partea de coroană, cuprinsă între două tangente paralele la cercul mic, $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, este echivalentă cu:

S = Aria coroanei — 2 aria segmentului AMB,

sau $S = \pi(R^2 - r^2) - 2 \cdot \frac{\pi R^2 - S_4}{4}$, unde am notat cu S_4 aria pătratului înscris în cercul mare.

Avem deci:

$$S = \pi(2r^2 - r^2) - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2r^2 - 4r^2}{4} = 2r^2$$

ceea ce justifică afirmația din enunț.

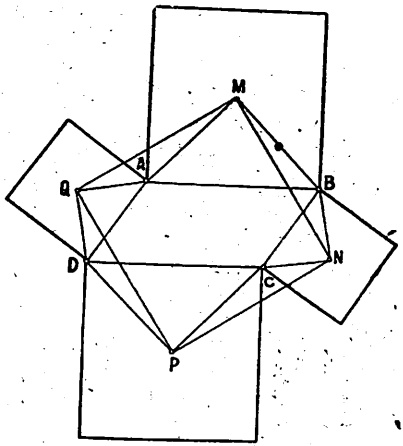


Fig. 26

155. Pentru a demonstra că $MNPQ$ (fig. 26) format de centrele pătratelor construite pe laturile paralelogramului $ABCD$ este un pătrat, vom arăta că laturile $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ și $\overline{QM}$ sînt egale și unghiurile patrulaterului $MNPQ$ sînt drepte.

În acest scop considerăm numai două laturi consecutive $\overline{MN}$ și $\overline{NP}$; să arătăm că $\overline{MN} = \overline{NP}$ și $\widehat{MNP} = 90°$. Triunghiurile MBN și NCP sînt egale pentru că avem $\overline{MB} = \overline{CP}$ ca jumătăți de diagonale ale unor pătrate egale, iar $\overline{BN} = \overline{CN}$ ca jumătățile diagonalelor aceluiași pătrat.

Apoi avem: $\widehat{MBN} = \widehat{MBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBN} = 45° + \widehat{ABC} + 45° = 90° + \widehat{ABC}$ și $\widehat{NCP} = \widehat{NCC'} + \widehat{C'CC_1} + \widehat{C_1CP} = 45° + \widehat{C'CC_1} + 45° = 90° + \widehat{C'CC_1}$.

Unghiurile $C'CC_1$ și ABC sînt egale ca fiind unghiuri ascuțite cu laturi perpendiculare, de unde rezultă $\widehat{MBN} = \widehat{NCP}$. Deducem că triunghiurile NBN și NCP sînt egale și prin urmare $\overline{MN} = \overline{NP}$. Să evaluăm acum unghiul MNP. Avem $\widehat{MNP} = \widehat{MNC} + \widehat{CNP} = \widehat{MNC} + \widehat{BNM} = \widehat{BNC} = 90°$. La fel

se arată că $\overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM}$ și $\widehat{NPQ} = \widehat{PQM} = \widehat{QMN} = 90°$. Rezultă deci că $MNPQ$ este un pătrat, ceea ce trebuia demonstrat.

156. Dacă A și B sînt două vîrfuri opuse date, atunci $\overline{AB}$ este una din diagonalele rombului. Cealaltă diagonală este perpendiculară pe prima, în mijlocul distanței dintre cele două vîrfuri. Construcția ce rezultă este următoarea. Se ridică o perpendiculară în I (fig. 27) mijlocul distanței $\overline{AB}$. Aceasta taie cercul, în general, în 2 puncte C_1 și C_2. Luăm simetricele acestor puncte față de AB din pozițiile C_1', C_2'.

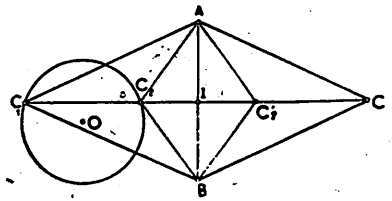


Fig. 27

Romburile formate $AC_1'BC_1$ și $AC_2'BC_2$ sînt soluții ale problemei.

Discuție. Problema admite două soluții, una sau nici una, după poziția cercului față de segmentul $\overline{AB}$.

În cazul cînd distanța d de la centrul cercului dat pînă la Δ perpendiculară în I pe AB este mai mică decît raza cercului R, atunci avem două soluții distincte. Numai în cazul cînd O centrul cercului se confundă cu I cele două soluții se reduc la una, pentru că în acest caz C_2 este simetricul lui C_1 față de I.

În cazul $d = R$ avem o singură soluție.

Dacă $d > R$ nu avem soluții.

157. Din teorema care spune că paralela la baza unui triunghi dusă din mijlocul unei laturi trece prin mijlocul laturii a treia, deducem :

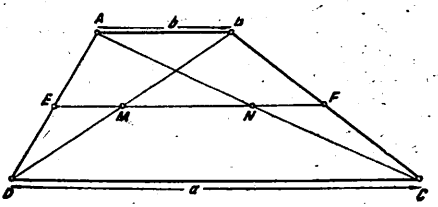


Fig. 28

a) Paralela dusă din E mijlocul laturii $\overline{AD}$ la baza $\overline{AB}$ a triunghiului ADB (fig. 28) trece prin mijlocul M al laturii $\overline{DB}$.

b) Paralela dusă din M la baza DC a triunghiului DBC trece prin mijlocul F al laturei $\overline{BC}$.

c) Paralela dusă din F la baza $\overline{AB}$ a triunghiului ABC trece prin mijlocul N al laturii $\overline{AC}$.

Aşadar M şi N se află pe dreapta care uneşte mijloacele E şi F ale laturilor neparalele $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$.

Putem deci scrie: $\overline{MN} = \overline{EN} - \overline{EM}$. (1)

Se ştie că $\overline{EN} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{a}{2}$ şi $\overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{b}{2}$ pentru că segmentul care uneşte mijloacele laturilor unui triunghi este egal cu jumătatea laturii a treia.

Deducem, aşadar, din (1):

$$\overline{MN} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

158. Ducînd din capătul B al bazei mici o paralelă la AD (fig. 29), aceasta taie baza mare într-un punct E astfel că $\overline{DE} = \overline{AB}$. Cum avem $\overline{AB} < \overline{DC}$, rezultă că şi $\overline{DE} < \overline{DC}$, adică punctul E cade între D şi C. Rezultă că $\widehat{ABE} < \widehat{ABC}$.

Notînd unghiul $EBC = u$ atunci suma unghiurilor alăturate bazei mici este:

$$\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = (\widehat{DAB} + \widehat{ABE}) + \widehat{EBC} = 180^\circ + u. \quad (1)$$

Prin ducerea unei paralele din C la latura DA se formează unghiul $BCF = \widehat{EBC} = u$, după care deducem suma unghiurilor alăturate bazei mari:

$$\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = (\widehat{ADC} + \widehat{ECD}) - \widehat{BCE} = 180^\circ - u. \quad (2)$$

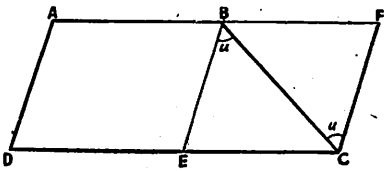


Fig. 29

Comparînd (1) cu (2), găsim:

$$\widehat{DAB} + \widehat{ABC} > \widehat{ADC} + \widehat{BCD},$$

ceea ce trebuia dovedit.

159. Deoarece $\widehat{CMB} = \text{măs.}\frac{\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC}}{2}$, rezultă că : $\frac{\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC}}{2} =$

$= 64°$ sau $\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC} = 128°$(1). Dar, din enunțul problemei : $\frac{\overset{\smile}{AD}}{\overset{\smile}{BC}} = \frac{3}{5}$ (2). Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (1) și (2), obținem : $\overset{\smile}{AD} = 48°$, $\overset{\smile}{BC} = 80°$. Rezultă că : $\overset{\smile}{DB} = 180° - 48° = 132°$ și

$$\overset{\smile}{AC} = 180° - 80° = 100°.$$

Deci : $\widehat{DAC} = \text{măs.}\frac{\overset{\smile}{DB} + \overset{\smile}{BC}}{2} = \frac{132° + 80°}{2} = 106°.$

$$\widehat{DBC} = \text{măs.}\frac{\overset{\smile}{DA} + \overset{\smile}{AC}}{2} = \frac{148°}{2} = 74°.$$

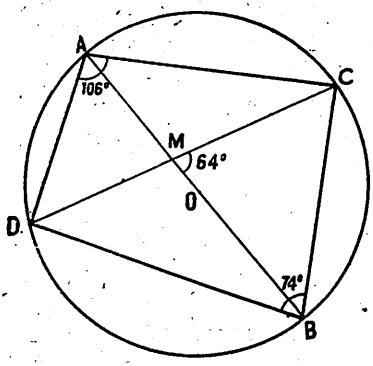


Fig. 30

Unghiurile ADB și ACB sînt drepte, fiind înscrise în cîte un semicerc (fig. 30).

160. Presupunem problema rezolvată, am construit trapezul isoscel $ABCD$, avînd $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$ (fig. 31) și unghiul DAB egal cu unghiul $\overline{ABC} = 120°$. Unghiurile ascuțite ale acestui trapez isoscel sînt de cîte 60° (cele două unghiuri alăturate uneia din laturile neparalele sînt suplimentare, ca interne de aceeași

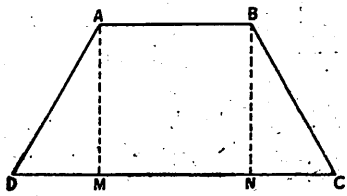


Fig. 31

parte a secantei, formate de această latură cu paralelele AB și DC). Dacă ducem AM și BN perpendiculare pe DC, din cele două unghiuri de 120° se formează două unghiuri drepte MAB și NBA precum și două unghiuri a cîte 30° ($\widehat{DAM}$ și $\widehat{NBC}$). Rezultă că $\overline{DM} = \frac{\overline{AD}}{2}$ și $NC = \frac{\overline{BC}}{2}$.

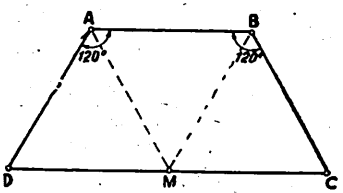


Fig. 32

(Cateta opusă unghiului de 30° este egală cu jumătatea ipotenuzei). Observăm că $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AB}$ (prin construcție) și $\overline{MN} = \overline{AB}$ (laturi opuse în dreptunghiul $ABNM$) putem calcula baza mare a trapezului isoscel:

$$\overline{DC} = \overline{DM} + \overline{MN} + \overline{NC} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} + \overline{AB} = 2\overline{AB}.$$

Pentru a realiza construcția grafică, se construiește un triunghi echilateral ABM, avînd toate laturile egale cu $\overline{AB}$ și apoi se construiesc alte două triunghiuri echilaterale ADM și BCM, așa cum se vede în figura 32. Se va obține astfel un trapez (DM și MC sînt paralele cu AB deoarece unghiurile alterne interne DMA și MAB că și unghiurile alterne interne CMB și MBA sînt egale). Acest trapez îndeplinește condițiile cerute pentru că $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AB}$, ca fiind laturi în triunghiuri echilaterale egale, iar unghiurile DAB și ABC au 120° ca fiind formate din două unghiuri de triunghi echilateral (60 grade).

161. Dacă notăm cu x lățimea sălii, lungimea este $3x$ iar raza unui semicerc este $\frac{x}{2}$. Aria sălii se compune din aria dreptunghiului și a celor 3 cercuri egale (6 semicercuri), deci se poate exprima în funcție de lățimea x astfel: $A = x \cdot 3x + 3\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Știind că aria totală este egală cu 1933, 1550 mp, obținem o ecuație din care deducem lățimea sălii $x = 19$ m, iar lungimea sălii $3x = 57$ m.

162. Desigur că maistrul a avut dreptate. Cu trei bare de lungimi date nu se poate construi un triunghi deformabil. Într-adevăr, dacă triunghiul (fig. 33) ar fi deformabil, ar însemna să existe un alt triunghi cu laturile de aceleaşi lungimi cu ale primului, dar care să aibă alte unghiuri, ceea ce este imposibil.

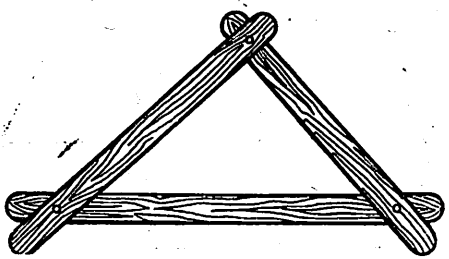


Fig. 33

Teorema care se aplică aci este aceea care priveşte două triunghiuri cu laturi respective egale, despre care se ştie că sînt egale.

Cît priveşte patrulaterele, ele sînt deformabile cînd sînt date numai prin lungimile laturilor. Patrulaterele devin ţepene cînd unim două vîrfuri opuse, adică atunci cînd formăm patrulaterul din două triunghiuri nedeformabile.

163. a) Triunghiul are un unghi de 90° şi totuşi latura opusă nu trece prin centrul cercului; aceasta nu este posibil (fig. 34).

b) Cercurile sînt exterioare, suma razelor acestor cercuri este 2,86 + 2,75 = 5,61, iar distanţa centrelor este notată cu 5 cm. Imposibil, pentru că distanţa centrelor la două cercuri exterioare trebuie să fie mai mare ca suma razelor.

c) În cerc sînt înscrise două unghiuri în acelaşi arc a căror măsură nu este aceeaşi (47° 46′ şi 48° 47′).

d) Sînt duse din acelaşi punct două tangente la cerc cu lungimi neegale (8,1 cm şi 7,9 cm). Imposibil!

164. Cele două bisectoare ale unghiurilor din A, cea exterioară AD şi cea interioară AE (fig. 35), fiind bisectoare a două unghiuri suplimentare adiacente, sînt perpendiculare.

Bisectoarea interioară AE a triunghiului isoscel ABC este totodată şi înălţimea, conform unei teoreme binecunoscute. Rezultă că dreptele AD şi BC sînt perpendiculare pe o aceeaşi dreaptă AE, deci sînt paralele. Aşadar, bisectoarea exterioară AD este paralelă cu baza triunghiului.

Pentru a răspunde la a doua întrebare ne sprijinim pe rezultatul anterior. Cu rigla gradată purtăm două segmente egale

AB şi AC pe laturile unghiului exterior A (fig. 36). Unind B cu C se formează un triunghi isoscel.

Printr-o mişcare de translaţie care poate fi realizată cu linia gradată şi echerul ducem din A o paralelă la BC. Dreapta AD obţinută este bisectoarea unghiului A.

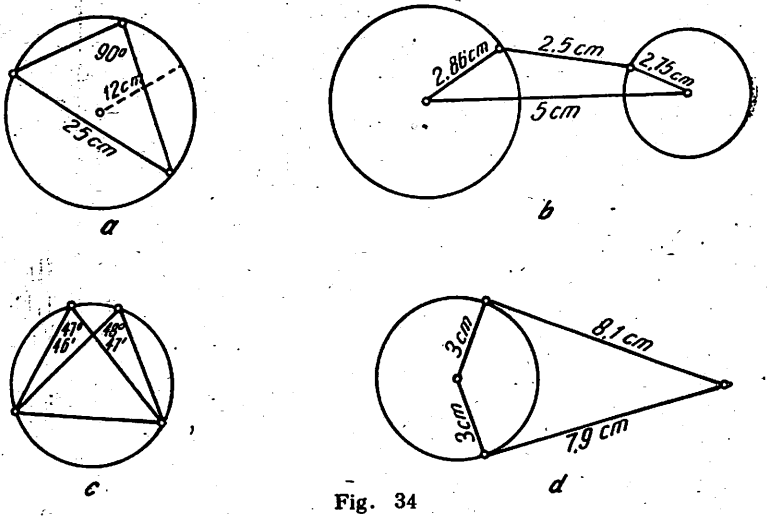


Fig. 34

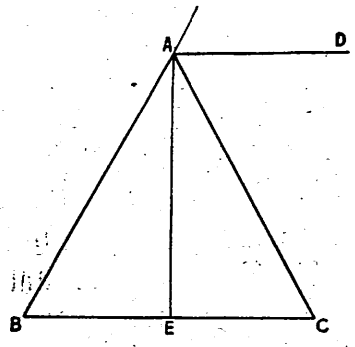


Fig. 35

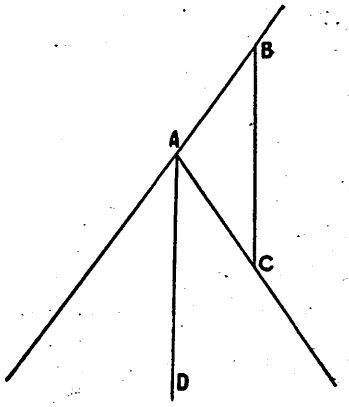


Fig. 36

165. Linia care unește mijloacele laturilor neparalele (fig. 37) este egală cu semisuma bazelor. Rezultă că suma bazelor este egală cu :

$$2.120 \text{ cm} = 240 \text{ cm}.$$

Lungimea lanțului trebuie să fie deci :

$$L = 90 + 90 + 240 =$$
$$= 420 \text{ cm} = 4{,}20 \text{ m}.$$

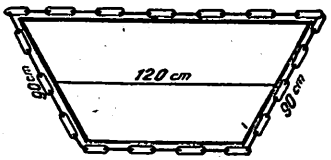


Fig. 37

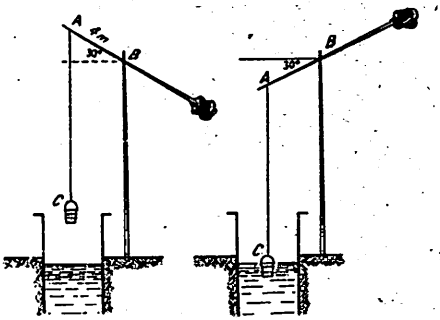


Fig. 38

166. De la o poziție la alta ciutura coboară astfel (fig. 38) încît bîrna AB descrie un unghi de 60°. Distanța parcursă de ciutură este deci cît lungimea AB, adică 4 m. Prin urmare adîncimea fîntînii este de $4 - 1{,}5 = 2{,}5$ m.

167. Să exprimăm mai întîi rezultatul independent de valorile numerice ale laturilor. Prin ducerea dreptelor AM și AN paralele cu bisectoarele interioare BI și CI ale unghiurilor B și C se formează două triunghiuri isoscele AMB și ANC

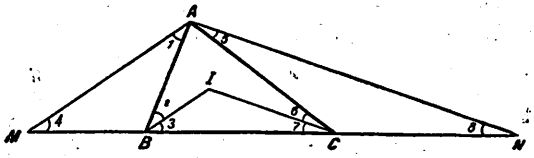


Fig. 39

(fig. 39). Într-adevăr, din faptul că $AM \| BI$ deducem $\hat{1} = \hat{2}$ și $\hat{4} = \hat{3}$ rezultă că $\hat{1} = \hat{4}$ pentru că $\hat{2} = \hat{3}$, dreapta BI fiind bisectoare. Triunghiul AMB este deci isoscel. La fel se arată că și ANC este de asemeni isoscel. Deducem că : $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$.

Așadar, segmentul MN este egal cu perimetrul triunghiului. În cazul numeric rezultă $MN = 5$ cm $+ 6$cm $+ 7$cm $=$ $= 18$ cm.

168. Să evaluăm unghiul u al dreptelor AA_1, B_1C_1.

Avem : $u = \text{măs}\,\frac{\overset{\frown}{AB_1} + \overset{\frown}{C_1BA_1}}{2}$.

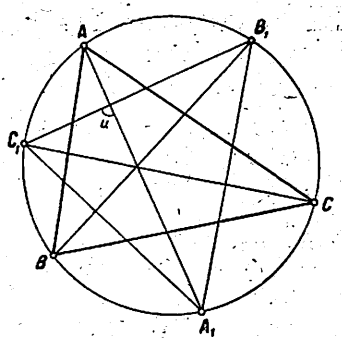


Fig. 40

Observăm :

$$\text{măs}\,\frac{\overset{\frown}{AB_1}}{2} = \widehat{ABB_1} = \frac{\widehat{B}}{2}$$

și $\text{măs}\,\frac{\overset{\frown}{C_1BA_1}}{2} = \text{măs}\,\frac{\overset{\smile}{C_1B}}{2} + \text{măs}$

$\frac{\overset{\smile}{BA_1}}{2} = \widehat{C_1CB} + \widehat{BAA_1} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Așadar :

$$u = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90°.$$

Rezultă că $AA_1 \perp B_1C_1$. La fel se demonstrează că $CC_1 \perp AB$ și $BB_1 \perp AC$ ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

Pentru a calcula unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$, observăm că : $\widehat{A_1} = \text{măs}\,\frac{\overset{\frown}{C_1A} + \overset{\frown}{AB_1}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$. La fel avem :

$$\widehat{B_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \text{ și } C_1 = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

În cazul numeric $\widehat{A} = 75°$; $\widehat{B} = 45°$, avem $\widehat{C} = 60°$ și prin urmare :

$$\widehat{A_1} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 52°30', \widehat{B_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 67°30' \text{ și } \widehat{C_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 60°.$$

169. Notăm cu A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC (fig. 41) și cu H punctul de întîlnire al înălțimilor.

Deoarece triunghiurile $HA'B$ și $HC'B$ sînt dreptunghice, înseamnă că vîrfurile A' și C' sînt situate pe cercul descris pe $\overline{HB}$ ca diametru. Rezultă de aici că $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$ ca avînd aceeași măsură arcul de cerc ce unește punctele H și C'. La fel se arată că $\hat{C}_4 = \hat{A}'_3$. Unghiurile B_2 și C_4 sînt egale ca avînd laturi perpendiculare. ($CC' \perp BC'$ și $CB' \perp BB'$), deducem deci că $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_3$ și prin urmare AA' este bisectoarea unghiului $C'A'B'$. În mod analog se demonstrează că BB' și CC' sînt celelalte două bisectoare interioare ale triunghiului $A'B'C'$.

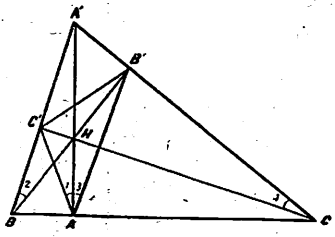


Fig. 41

Pentru că $BC \perp AA'$ rezultă că latura BC este bisectoarea unghiului exterior din A', iar celelalte laturi AC și AB sînt bisectoarele unghiurilor exterioare din B' și C'. Cu aceasta am demonstrat în mod complet afirmația din enunț.

Observare. Precizarea că triunghiul ABC nu este dreptunghic este necesară pentru că în cazul cînd unul din unghiuri, de exemplu A, este de 90°, triunghiul $A'B'C'$ nu există deoarece picioarele B' și C' ale înălțimilor duse din B și C se confundă cu A.

170. Să notăm $\widehat{C'A'A} = 1'$ și $\widehat{AA'B'} = 2'$ unghiurile parțiale ale unghiului A', a cărui mărime vrem s-o aflăm.

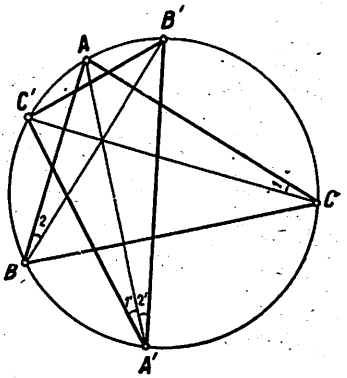


Fig. 42

Observăm că $\hat{1}'$ are aceeași măsură cu $\hat{1} = \widehat{C'CA}$, iar $\hat{2}'$ cu $\hat{2} = \widehat{B'BA}$, rezultă:

$$\hat{A}' = \widehat{C'CA} + \widehat{B'BA} = (90° - \hat{A}) + (90° - \hat{A}) = 180° - 2\hat{A}.$$

La fel se arată că: $\hat{B}' = 180° - 2\hat{B}$ și $\hat{C}' = 180° - 2C$.

171. Notăm cu b baza și cu i înălțimea triunghiului. Aria triunghiului ABC este $A = \frac{bi}{2}$, iar a triunghiului ADE este egală cu $S = \frac{\overline{DE} \cdot \overline{AM}}{2}$, unde AM este înălțimea triunghiului ADE.

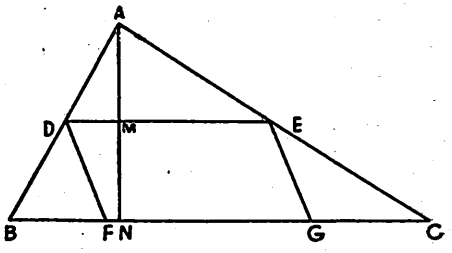


Fig. 43

Avînd în vedere că $\overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{b}{2}$ și că $\overline{AM} = \frac{\overline{AN}}{2} = \frac{i}{2}$, rezultă: $S = \frac{bi}{8}$.

Avem:

$$\frac{S}{A} = \frac{\frac{bi}{8}}{\frac{bi}{2}} = \frac{1}{4},$$

ceea ce demonstrează că aria triunghiului ADE este un sfert din aria triunghiului ABC.

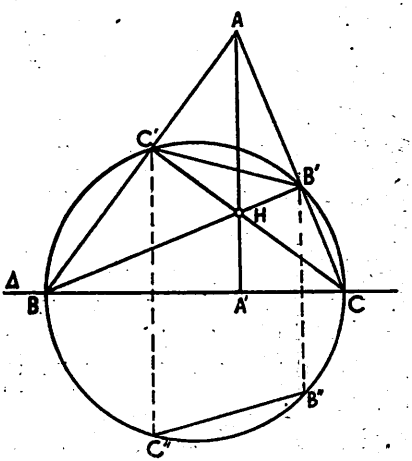


Fig. 44

Aria paralelogramului $DEFG$ este egală cu $s = \overline{DE} \cdot \overline{MN}$; prin urmare: $S = \frac{b}{2} \cdot \frac{i}{2} = \frac{bi}{4}$. Rezultă că aria paralelogramului este egală cu jumătatea ariei triunghiului ABC.

172. Să presupunem triunghiul ABC (fig. 44) construit. Picioarele înălțimilor B' și C', date, sînt situate pe cercul descris pe BC ca diametru. Dacă luăm simetricele B'', C'' ale punctelor B', C' față de dreapta Δ, dată, pe care se află diametrul BC, acestea se vor afla de asemeni pe cerc. Din cele spuse decurge următoarea construcție. Se iau simetricele B'',

C'' ale punctelor date B', C' față de dreapta Δ, dată, apoi se descrie cercul circumscris trapezului $B'B''C''C'$. Cercul obținut taie Δ în B și C două vîrfuri ale triunghiului căutat. Unim apoi (B, C') și (C, B'), dreptele obținute se intersectează în A, al treilea vîrf al triunghiului.

173. Analizînd trapezul presupus construit, vom trage concluzii cu privire la modul cum se rezolvă problema cu datele

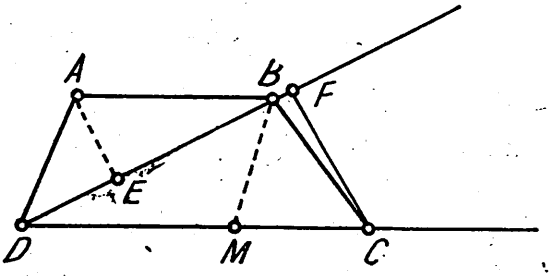


Fig. 45

ei. Din B ducem paralela BM la AD. Triunghiul format BMC (fig. 45) are toate laturile cunoscute : $\overline{BC} = 5$ cm ; $\overline{BM} = AD = 4$ cm și $\overline{CM} = \overline{CD} - \overline{AM} = \overline{CD} - \overline{AB} = 10$ cm $- 6$ cm $= 4$ cm.

Rezultă din cele arătate modul de construire a trapezului. Se formează triunghiul BCM cu laturile 5 ; 4 și 4 ; după care prelungim $\overline{CM}$ cu segmentul $\overline{MD} = \overline{AB} = 6$ cm, iar din D se duce paralela DA la MB care întîlnește paralela din B la CM în A cel de al patrulea vîrf al trapezului. Din raționamentul făcut rezultă că aceeași construcție o folosim în cazul general cînd sînt date bazele trapezului și laturile neparalele.

Să calculăm acum raportul $\frac{\overline{AE}}{\overline{CF}}$. Triunghiurile ABD și BDC avînd aceeași bază DB rezultă că raportul ariilor lor este egal cu raportul înălțimilor pe baza comună adică cu $\frac{\overline{AE}}{\overline{CF}}$.

Pe de altă parte, dacă luăm drept baze pentru triunghiurile ABD și BDC pe AB și CD, rezultă că raportul acestor arii

este $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$, pentru că dreptele AB şi CD fiind paralele, înălţimea pe AB este egală cu înălţimea pe DC, prin urmare avem:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}.$$

În cazul numeric deducem:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

prin urmare:

$$5 \cdot \overline{AE} = 3 \cdot \overline{CF},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

174. Dintr-un punct M al cercului mare (fig. 46) se pot duce două tangente MT, MT', la cercul mijlociu şi alte două tangente MP, MP' la cercul mic. Unghiurile formate de o tangentă la cercul mijlociu şi de altă tangentă la cercul mic pot fi $\widehat{TMP}$, $\widehat{TMP'}$, $\widehat{PMT'}$ şi $\widehat{P'MT'}$. Din aceste unghiuri, două cîte două sînt egale:

$$\widehat{TMP} = \widehat{PMT'} \text{ şi } \widehat{TMP'} = \widehat{PMT'},$$

din cauza simetriei faţă de dreapta MO. Rezultă deci că unghiul tangentelor la cercul mijlociu şi cel mic poate avea două valori:

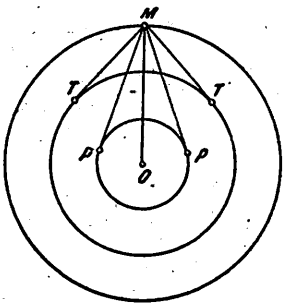


Fig. 46

$$\alpha = \widehat{TMP} \text{ şi } \beta = \widehat{TMP'},$$

aceasta se întîmplă oriunde ar fi situat M pe cercul cel mare.

175. Presupunem problema rezolvată şi ABC triunghiul căutat

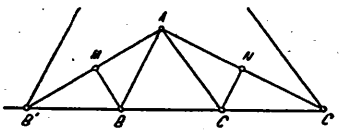


Fig. 47

(fig. 47). Să examinăm figura în lumina datelor din problemă. Dacă prelungim $\overline{BC}$ cu segmentul $\overline{CC'} = \overline{BC}$ şi $\overline{CB}$ cu segmentul $\overline{BB'} = \overline{CB}$, obţinem segmentul $\overline{B'C'}$ egal cu

perimetrul triunghiului. Triunghiurile ABB', ACC', fiind isoscele, avem: $\widehat{B} = 2\widehat{B'}$ şi $\widehat{C} = 2\widehat{C'}$.

Rezultă din cele spuse că triunghiul $AB'C'$ conţine elementele date în problemă: $\widehat{B'} = \frac{\widehat{B}}{2}, \widehat{C'} = \frac{\widehat{C}}{2}$ şi $\overline{B'C'}$ = perimetrul.

Construcţia care urmează este deci următoarea. La extremităţile segmentului egal cu lungimea perimetrului triunghiului, se construiesc unghiurile B şi C şi bisectoarele acestora $B'A$ şi $C'A$ care determină vîrful A. În mijlocul M şi N al segmentelor $\overline{B'A}$, $\overline{C'A}$ se ridică perpendiculare care taie $B'C'$ în punctele B şi C celelalte două vîrfuri ale triunghiului căutat.

Aplicaţia numerică este o reluare a celor spuse mai sus.

176. Notăm punctele de tangenţă ale celor trei cercuri de construit cu A, B, C (fig. 48). Din cauză că cercurile interioare de centre L, M, N, sînt egale, rezultă că A, B, C sînt vîrfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul de centru O. De aci se vede că există o infinitate de cercuri L, M, N, care pot fi construite în interiorul cercului O. E suficient să avem o poziţie, din care prin rotirea în jurul lui O obţinem toate celelalte poziţii.

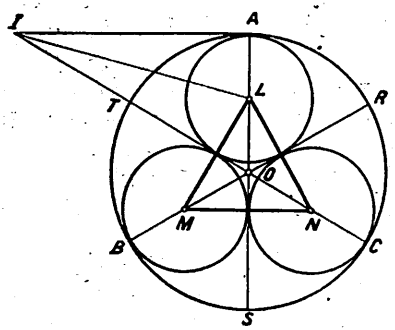


Fig. 48

Pentru găsirea cercului L tangent cercului O în A, ducem tangenta comună cercurilor L, M care taie arcul AB în mijlocul său T. Dreptele OT şi tangenta comună cercurilor L şi O din A se taie în I. Centrul L pe care-l căutăm fiind egal depărtat de OI şi AI este situat pe bisectoarea unghiului I; de asemenea centrul L este aşezat pe perpendiculara în A pe dreapta AI. Din această analiză rezultă construcţia geometrică a celor trei cercuri. Se împarte cercul cel mare (O) în trei părţi egale prin punctele A, B, C. Se duce tangenta în A la cercul O şi dreapta care uneşte centrul O cu mijlocul T al arcului AB, apoi bisectoarea interioară a unghiului AIO format. Perpendiculara în A pe

AI taie bisectoarea în L, centrul unuia din cercuri. Se duce apoi $LM \perp OI$ şi se poartă pe LM raza LA de două ori, obţinem astfel centrul M etc....

177. Să presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul căutat (fig. 49) şi care se presupune că a fost construit fiind date: A unul din vîrfuri şi D_1, D_2 bisectoarele interioare ale celorlalte două unghiuri.

Se ştie că unghiul obtuz BIC format de bisectoarele interioare D_1 şi D_2 este egal cu:

$$u = 90° + \frac{\hat{A}}{2} \text{ de unde}$$

rezultă $\frac{\hat{A}}{2} = u - 90°$.

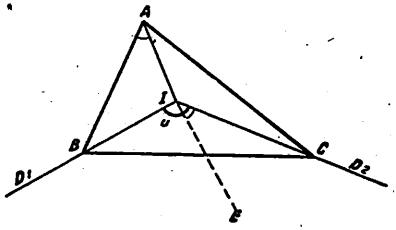


Fig. 49

De aci decurge construcţia. Fiind date dreptele D_1, D_2, unim punctul lor comun I cu vîrful cunoscut A, iar în I pe dreapta D_1 ridicăm o perpendiculară IE care să cadă în interiorul unghiului obtuz al dreptelor D_1 şi D_2. Unghiul EID_2 este egal cu $u - 90°$, adică cu $\frac{A}{2}$. Construim de o parte şi de alta a dreptei AI unghiurile BAI şi CAI egale între ele cu $\frac{A}{2} = u - 90°$. Laturile AB şi AC taie D_1 şi D_2 în celelalte două vîrfuri ale triunghiului.

178. Se observă că: $52°30' = 60° - 7°30' = 60° - \frac{60°}{8}$.

Din această constatare rezultă construcţia unghiului cu rigla şi compasul.

Se construieşte un triunghi echilateral ABC (fig. 50). Unghiul A este de 60°. Acesta se împarte în două părţi egale. Una din jumătăţile acestui unghi DAC se împarte din nou în două părţi egale prin ducerea bisectoarei EA a unghiului DAC. Apoi prin construirea bisectoarei FA a unghiului EAC se formează unghiul $FAC = \frac{60°}{8}$. Rezultă că unghiul BAF este de $52°30'$.

179. Să presupunem problema rezolvată şi să examinăm sub ce formă intră elementele date.

Fie $ABCD$ (fig. 51) trapezul căutat înscris în cercul dat O. Cunoaştem $\overline{BB'}$ înălţimea dusă din B şi $\overline{B'C}$ egal cu semidiferenţa bazelor, pentru că trapezul fiind înscris în cerc este isoscel. Rezultă posibilitatea construirii triunghiului dreptunghic $BB'C$ şi prin urmare a trapezului.

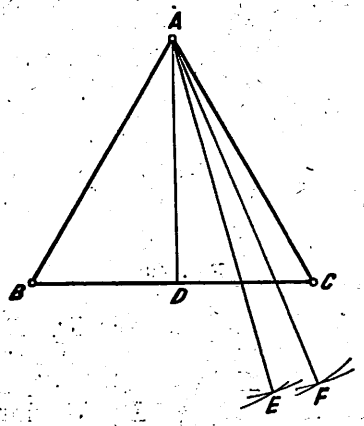


Fig. 50

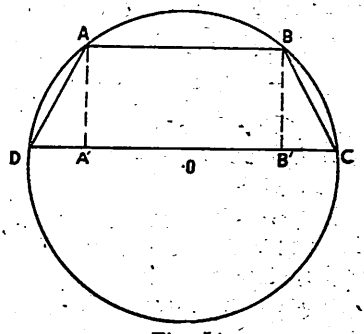


Fig. 51

Pe baza datelor şi a observaţiilor anterioare, construcţia se realizează astfel. Se construieşte triunghiul dreptunghic având drept catete înălţimea trapezului şi semidiferenţa bazelor. Triunghiul astfel construit se aşază cu extremităţile B şi C ale ipotenuzei pe cercul dat şi astfel ca vîrful B' a unghiului drept să fie în interiorul cercului. Se prelungeşte CB', pînă taie cercul în D, iar din B se duce o paralelă la CD care de asemeni taie cercul în A. Unim A cu D, figura obţinută $ABCD$ este trapezul căutat.

180. Unghiurile CAD şi BAD formate de înălţimea AD cu cele două catete (fig. 52) sînt respectiv egale cu B şi C. Unghiurile DAE şi DAF formate de înălţimea AD cu perpendicularele duse din A pe bisectoarele unghiurilor C şi B sînt respectiv egale cu $\widehat{ECD} = \frac{\widehat{C}}{2}$ şi $\widehat{DBF} = \frac{\widehat{B}}{2}$ pentru că au laturile perpendiculare.

Rezultă din cele spuse pînă aci că:

$$\widehat{DAE} = \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \text{ şi } \widehat{DAF} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{CAD}}{2};$$

prin urmare AE şi AF sînt respectiv bisectoarele unghiurilor DAB şi DAC, ceea ce trebuia demonstrat.

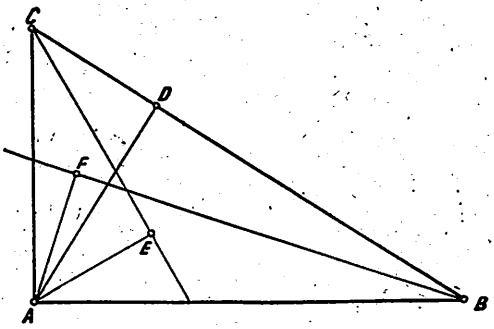


Fig. 52

181. Bisectoarele interioare ale unghiurilor paralelogramului $ABCD$ formează dreptunghiul $EFGH$ (fig. 53). Într-adevăr, bisectoarele a două unghiuri interne alăturate DAB şi ADC ale unui paralelogram sînt perpendiculare, pentru că bisectoarele unghiurilor corespondente LDC şi DAB sînt paralele, iar a unghiurilor suplimentare adiacente LDC şi ADC sînt perpendiculare. În mod identic se arată că bisectoarele DEF, CGF şi BGH sînt respectiv perpendiculare pe CGF, BGH, AEH. Rezultă că $EFGH$ este un dreptunghi.

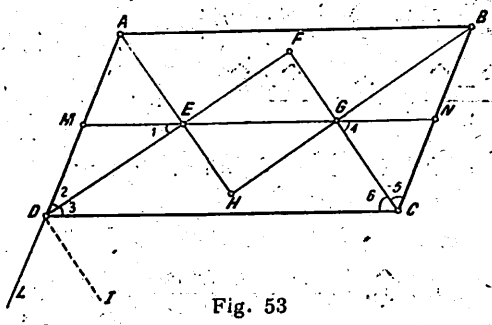


Fig. 53

Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$; se ştie că medianele $\overline{EM}$ şi $\overline{GN}$ ale triunghiurilor dreptunghice AED şi BGC sînt respectiv egale cu jumătăţile ipotenuzelor $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$. Rezultă că triunghiurile MDE şi GNC sînt isoscele. Avem deci $\hat{E}_1 = \hat{D}_2$ şi cum $\hat{D}_2 = \hat{D}_3$ pentru că DE este bisectoare, rezultă deci că $\hat{E}_1 = \hat{D}_3$ şi prin urmare ME este paralelă cu DC.

La fel se arată că GN este paralelă cu DC. Punctele E şi G sînt deci situate pe paralela MN care uneşte mijloacele laturilor paralelogramului $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$. Deducem: $\overline{EG} = \overline{MN} - \overline{ME} - \overline{GN} = \overline{DC} - 2\overline{ME} = \overline{DC} - 2 \cdot \frac{\overline{AD}}{2} = \overline{DC} - \overline{AD}$.

Aşadar diagonalele dreptunghiului $EFGH$ sînt egale cu diferenţa laturilor alăturate ale paralelogramului.

182. Să evaluăm unghiul A_1 (fig. 54). Avem:

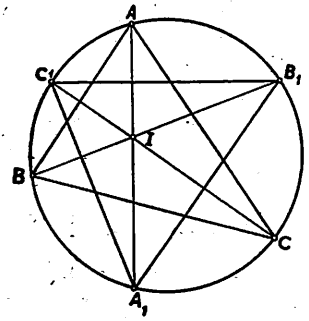


Fig. 54

$$\hat{A}_1 = \widehat{C_1A_1B_1} = \widehat{C_1A_1A} + \widehat{AA_1B_1}.$$

Unghiul C_1A_1A este egal cu $\widehat{C_1CA} = \frac{C}{2}$ ca fiind unghiuri înscrise în acelaşi arc de cerc; la fel avem:

$$\widehat{AA_1B_1} = \widehat{ABB_1} = \frac{B}{2}.$$

Rezultă deci:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}, \text{ în mod analog:}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \text{ şi } \hat{C}_1 = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}.$$

Cazul particular: $\hat{A} = 65°30'$, $\hat{B} = 35°56'$ şi deci: $\hat{C} = 78°34'$.

Avem:

$$\hat{A}_1 = \frac{35°56' + 78°34'}{2} = 57°15', \quad \hat{B}_1 = \frac{65°30' + 78°34'}{2} = 72°2'$$

şi: $\hat{C}_1 = \frac{65°30' + 35°56'}{2} = 50°43'$.

183. Unghiurile MAC şi NAB (fig. 55) fiind egale, rezultă că arcele MBC şi NCB sînt de asemeni egale. De aci decurge:

$$\overset{\smile}{MB} + \overset{\smile}{BC} = \overset{\smile}{NC} + \overset{\smile}{BC},$$

sau :

$$\overset{\smile}{MB} = \overset{\smile}{NC}.$$

Arcele MB şi NC fiind egale, înseamnă că MN şi BC sînt paralele.

184. Două din unghiurile triunghiului formate de bisec-

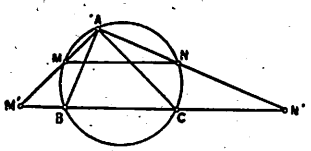


Fig. 55

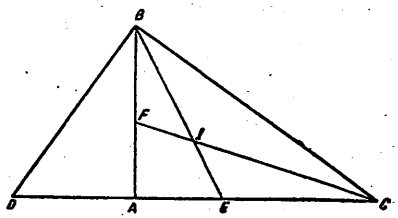


Fig. 56

toarele unghiurilor B şi C şi ipotenuza (fig. 56) sînt $\frac{B}{2}$ şi $\frac{C}{2}$. Rezultă că : $\widehat{BIC} = 180° - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = 180° - 45° = 135°$.

Triunghiul DBE are două unghiuri egale, $\widehat{DBE} = \widehat{BED}$, pentru că : $\widehat{DBE} = \widehat{DBA} + \widehat{ABE} = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{2}$, iar $\widehat{BED} = \widehat{ECB} + \widehat{EBC} = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{2}$.

Rezultă că triunghiul DBE este isoscel şi prin urmare avem $\overline{DB} = \overline{DE}$.

185. Fie O centrul exagonului regulat $ABCDEF$ (fig. 57) pe ale cărui laturi construim triunghiurile echilaterale $A'AB$, $B'BC$, ... $F'FA$.

Observăm că A' şi O sînt egal depărtate de A şi B deci $A'O$ este mediatoarea segmentului $\overline{AB}$. Dacă a este latura exagonului $ABCDEF$ atunci $\overline{A'O} = a\sqrt{3}$. La fel se arată că

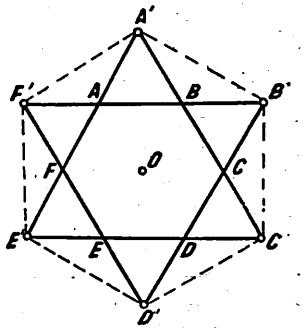


Fig. 57

$\overline{B'O} = \overline{C'O} = \ldots = \overline{F'O} = a\sqrt{3}$. Unghiul dintre $A'O$ şi $B'O$ este egal cu unghiul ascuţit al dreptelor AB şi BC, adică cu

60°. Rezultă că A', B', C' ... F' sînt vîrfurile unui exagon regulat cu raza $R = a\sqrt{3}$.

Aria acestui exagon este : $A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{2}$,

iar aria exagonului $ABCDEF$ este $S = \frac{3\,a^2\sqrt{3}}{2}$.

Avem deci $A = 3s$.

Ştiind că $s = 31{,}24$ m², obţinem $A = 93{,}72$ m².

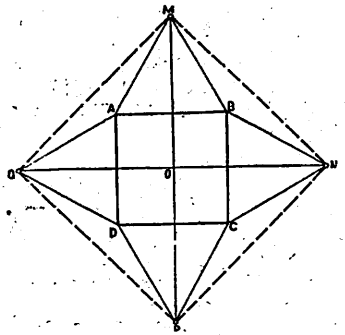


Fig. 58

186. 1) Perechile de puncte (M,P) şi (N,Q) (fig. 58) sînt aşezate pe axele de simetrie ale pătratului (perpendiculare pe laturi). Dreptele MP şi NQ se taie în centrul O al pătratului. Avem evident $MP \perp NQ$ şi $\overline{MO} = \overline{NO} = \overline{PO} = \overline{QO}$. Rezultă deci că $MNPQ$ este un pătrat.

2) Pentru a calcula volumul piramidei avem nevoie de aria pătratului $MNPQ$. Din triunghiul dreptunghic MON, rezultă :

$$\overline{MN}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{NO}^2 = 2 \cdot \overline{MO}^2 =$$

$$= 2\left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}(\sqrt{3}+1)^2$$

şi deci : $\overline{MN}^2 = \frac{a^2}{2}(4 + 2\sqrt{3}) = a^2(2+\sqrt{3})$.

Urmează că volumul piramidei este egal cu :

$$V = \frac{\overline{MN}^2 \cdot 3a\,(2-\sqrt{3})}{3} = a^2(2+\sqrt{3})\,a(2-\sqrt{3}),$$

sau :

$$V = a^3.$$

187. a) Prelungim mediana $\overline{AD}$ cu lungimea egală $\overline{DA'} = \overline{AD}$ (fig. 59). Unind A' cu B şi C se formează paralelogramul $ABA'C'$, pentru că D este situat la mijlocul segmentelor $\overline{BC}$ şi $\overline{AA'}$.

Triunghiurile NAM şi ACA' sînt asemenea avînd unghiurile egale :

$$\widehat{ANM} = \widehat{DAC} \text{ şi } \widehat{NAM} = \widehat{ACA'},$$

din cauză că dreptele MN şi DA sînt paralele prin ipoteză, iar $A'C \parallel MA$, figura $ABA'C$ fiind paralelogram.

Rezultă proporţionalitatea laturilor :

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CA'}\ (=\overline{AB})}$$

şi prin urmare $\overline{AM}\cdot\overline{AC} = \overline{AN}\cdot\overline{AB}$, ceea ce trebuia dovedit.

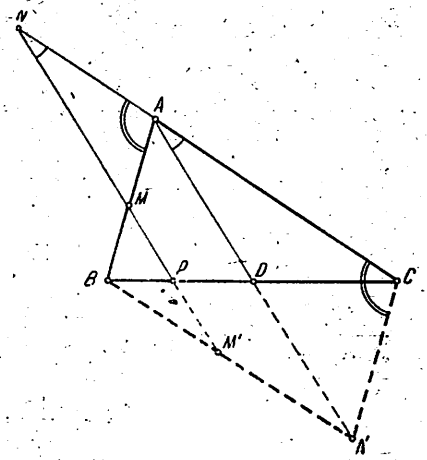


Fig. 59

b) Prelungim MP pînă taie latura BA' în M'. Deoarece D este mijlocul lui $\overline{AA'}$ şi MM' este paralelă cu AA', rezultă că şi P este mijlocul lui $\overline{MM'}$. De aci deducem :

$$\overline{NP} + \overline{MP} = \overline{NP} + \overline{PM'} = \overline{NM'} = \overline{AA'} = 2\,\overline{AD}.$$

Astfel am justificat şi relaţia b.

Observare. Propunem ca cititorul să examineze şi cazurile cînd P este situat pe BC în afara laturii BC.

188. Ducem din B o paralelă BKL la AD (fig. 60).

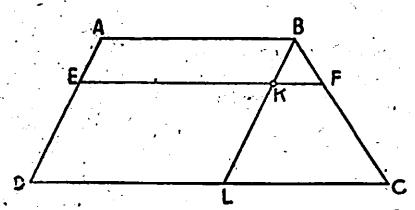


Fig. 60

Calculăm $\overline{KF}$. Avem :

$$\frac{\overline{KF}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BF}+\overline{FC}},$$

$$\text{sau : } \frac{\overline{KF}}{b-a} = \frac{\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}}{\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}+1} = \frac{m}{1+m},$$

de unde rezultă : $\overline{KF} = \dfrac{m(b-a)}{1+m}$ şi prin urmare :

$$\overline{EF} = \overline{EK} + \overline{KF} = a + \frac{m(b-a)}{1+m} = \frac{a+mb}{1+m}.$$

Observare. Cînd E şi F sînt situate pe prelungirile laturilor neparalele, atunci $\overline{EF} = \frac{a - mb}{1 - m}$. Justificarea acestei formule se face întocmai ca mai sus.

189. Cercurile egale cu centrele M, N, P tangente cercului O în A, B, C determină pe acesta vîrfurile unui triunghi echilateral ABC (fig. 61). Dacă notăm cu r raza unuia din cele trei cercuri M, N, P, observăm că laturile triunghiului echilateral MNP sînt egale fiecare cu cîte $2r$. Rezultă că raza MO a cercului circumscris lui MNP este egală cu:

$$\overline{MO} = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Scriem acum că raza $\overline{AO}$ a cercului mare este compusă din $\overline{AM} = r$ şi $\overline{MO} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, de unde obţinem:

$$r + \frac{2r}{\sqrt{3}} = R$$

şi prin urmare: $r = \frac{R\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = R\sqrt{3}\ (2 - \sqrt{3}) = R(2\sqrt{3} - 3)$.

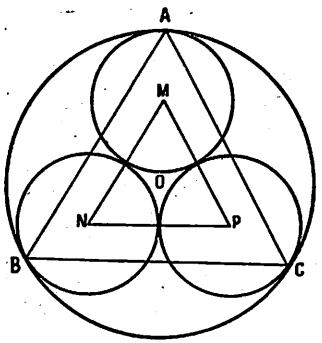


Fig. 61

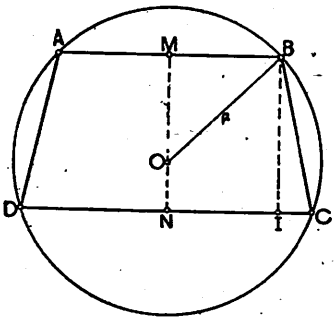


Fig. 62

190. Avem două cazuri.

1) Bazele trunchiului de con sînt situate de o parte şi de alta a centrului sferei (fig. 62). În figură este arătată o secţiune

printr-un plan dus prin axa trunchiului de con. Să calculăm dimensiunile. Înălțimea trunchiului este:

$$\overline{NM} = \overline{NO} + \overline{OM} = 0{,}6\,R + 0{,}8\,R = 1{,}4\,R,$$

cele două raze sînt:

$$\overline{MB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OM}^2} = R\sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6\ R,$$

$$\overline{NC} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{ON}^2} = R\sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8\ R,$$

iar generatoarea este:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BI}^2 + \overline{IC}^2} =$$

$$= \sqrt{(1{,}4\ R)^2 + (0{,}8\ R - 0{,}6\ R)^2},$$

sau: $\overline{BC} = R\sqrt{2}$.

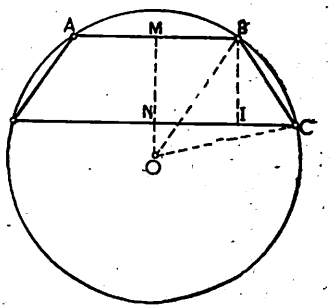


Fig. 63

Rezultă deci:

aria laterală $= \pi \cdot \overline{BC}\,(\overline{MB} + \overline{NC}) =$
$= \pi R\sqrt{2}\,(0{,}6\,R + 0{,}8\,R) = 1{,}4\sqrt{2}\,\pi R^2,$
iar volumul este:

$$v = \frac{\pi \cdot \overline{MN}}{3}\,(\overline{MB}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{NC} + \overline{NC}^2) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 1{,}4\,R}{3}\,(0{,}36\,R^2 + 0{,}48\,R^2 + 0{,}64\,R^2) =$$

$$= \frac{1{,}4 \cdot 1{,}48\pi}{3} \cdot R^3 = \frac{2{,}072\,\pi R^3}{3} \approx 2{,}169 R^3.$$

2) În cazul cînd bazele trunchiului sînt situate de aceeași parte a centrului (fig. 63) avem: $\overline{MN} = 0{,}2R$; $\overline{MB} = 0{,}6R$; $\overline{NC} = 0{,}8R$ și generatoarea $\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{5} R$.

Deducem aria laterală $= \pi \frac{\sqrt{2}}{5} R\,(0{,}6\,R + 0{,}8\,R) = \frac{1{,}4\sqrt{2}\,\pi}{5} R^2$
și volumul:

$$v = \frac{\pi \cdot 0{,}2R}{3} \cdot 1{,}48R^2 = \frac{0{,}296\,\pi}{3} \cdot R^3 \approx 0{,}3099\ R^3.$$

191. a) Trebuie să construim o dreaptă (d) așa fel ca perpendicularele coborîte din A, B și C pe ea să fie egale între ele.

Ne mărginim întîi la două puncte: M și N. Dreapta căutată (d) va putea să fie paralelă cu dreapta MN sau taie MN.

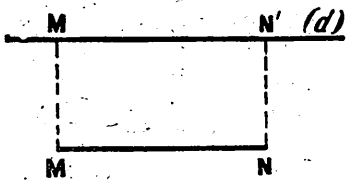


Fig. 64

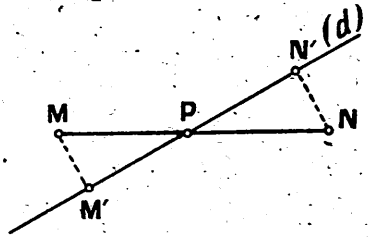


Fig. 65

În primul caz (fig. 64) nu mai este nimic de adăugat, căci dacă $d \parallel MN$, urmează $\overline{MM'} = \overline{NN'}$ și, reciproc, dacă perpendicularele ridicate în M și N pe MN sînt egale, $MNN'M'$ este un dreptunghi, deci $\overline{MM'} = \overline{NN'}$. Să luăm cazul cînd dreapta (d) taie dreapta MN (fig. 65). Dacă $\overline{MM'} = \overline{NN'}$, triunghiurile dreptunghice $MM'P$ și $NN'P$ vor fi egale ca avînd cîte o catetă egală ($\overline{MM'} = \overline{NN'}$) și $\hat{1} = \hat{2}$ ca unghiuri opuse la vîrf. Rezultă că $\overline{PM} = \overline{PN}$, adică (d) trece prin mijlocul segmentului $\overline{MN}$. Reciproc, fie P mijlocul segmentului $\overline{MN}$ și (d) o dreaptă oarecare ce trece prin P. Dacă coborîm din M și N cîte o perpendiculară pe (d), triunghiurile dreptunghice $MM'P$ și $NN'P$ vor fi egale ca avînd ipotenuzele $\overline{PM}$ și $\overline{PN}$ egale și cîte un unghi ascuțit egal, $\hat{1} = \hat{2}$. Deci, $\overline{MM'} = \overline{NN'}$. Mai observăm că, dacă dreapta (d) taie $\overline{MN}$ în afara segmentului $\overline{MN}$ (fig. 66) acela dintre punctele M și N care este mai aproape de punctul de intersecție este mai apropiat de (d), deci dreapta (d) nu poate îndeplini condiția din enunț. În rezumat, dreapta (d) trebuie să fie paralelă cu MN sau ea

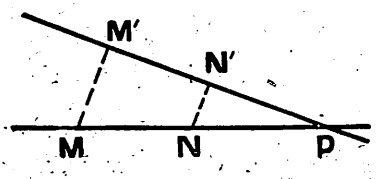


Fig. 66

trebuie să treacă prin mijlocul segmentului $\overline{MN}$. Fie acum ABC triunghiul dat (fig. 67 a). Dreapta căutată (d) nu va putea fi paralelă cu toate cele trei laturi ale triunghiului, căci aceste laturi sînt concurente două cîte două şi o dreaptă paralelă cu una din ele nu poate fi paralelă cu nici una din celelalte două. Deci, dreapta (d) trebuie să taie măcar una din laturile triunghiului, de exemplu AB. Conform cu cele arătate mai înainte, ea va trebui să treacă prin mijlocul D al acestei laturi. Numai atunci distanţele $\overline{AA'}$ şi $\overline{BB'}$ vor fi egale. Neputînd fi paralelă cu ambele laturi rămase AC şi BC, dreapta (d) va trebui să taie una din ele, de exemplu AC şi pentru ca punctele A şi C să se afle la aceeaşi depărtare de dreapta (d) ea va trebui să treacă prin mijlocul E al laturii $\overline{AC}$ (fig. 67 b), căci numai aşa distanţele $\overline{AA'}$ şi CC' vor fi egale.

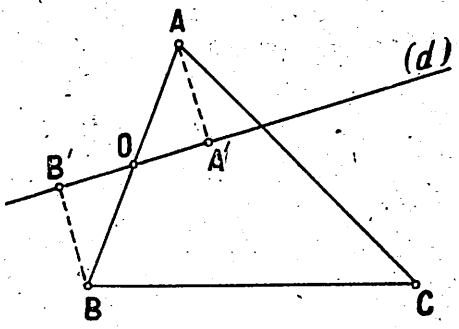


Fig. 67 a

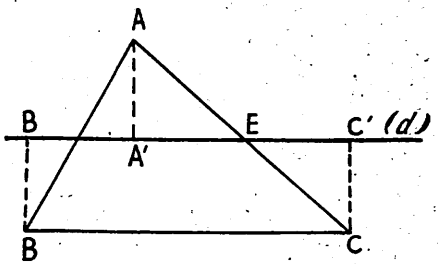


Fig. 67 b

Dreapta DE este o soluţie a problemei. În adevăr, din $\overline{BB'} = \overline{AA'}$, $\overline{AA'} = \overline{CC'}$, urmează că $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{AA'}$. Observăm că dreapta DE care uneşte mijloacele a două laturi ale triunghiului ABC este paralelă cu BC. Aşadar, dreapta căutată trebuie să unească mijloacele a două laturi ale triunghiului. Problema admite trei soluţii (fig. 68): dreptele (d), (d'), (d'') care unesc mijloacele a cîte două laturi ale triunghiului dat.

b) Cantonul trebuie construit în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Va trebui deci ca mediatoarele tri-

unghiului ABC să se taie într-un punct O situat pe dreapta care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului. Să luăm de exemplu cazul figurii 69 a. Dreapta (d) are de la început D comun cu mediatoarea laturii AB. Dacă ea conține și punctul O (deosebit de D), înseamnă că ea are două puncte comune cu mediatoarea, deci coincide cu ea. Aceasta înseamnă că DE este perpendiculară pe AB, adică $\hat{D}=90°$. Cum $DE \parallel BC$, urmează că și $\hat{B} = 90°$, adică triunghiul dat este dreptunghic în B. (fig. 69 a). Am presupus că punctul O este deosebit de punctul D. Dacă O coincide cu D, înseamnă că unghiul C este înscris într-un semicerc și ca atare este drept; iar triunghiul ABC este

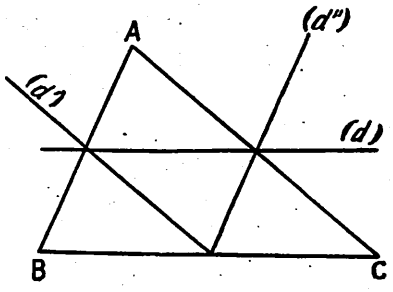


Fig. 68

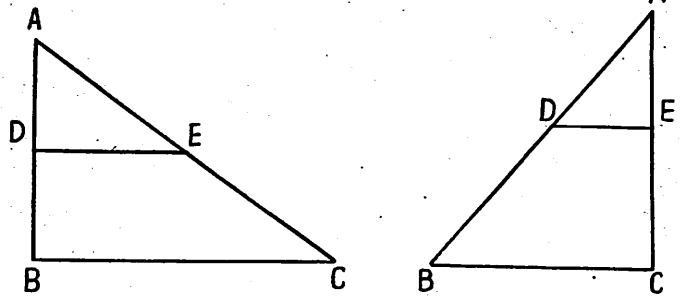


Fig. 69 a, b

dreptunghic în C(fig. 69 b). În concluzie, cantonul egal depărtat de cele trei sate poate fi construit numai cînd triunghiul dat ABC este dreptunghic, iar șoseaua este paralelă cu una din catete. Cînd triunghiul dat nu este dreptunghic, sau dacă triunghiul fiind dreptunghic șoseaua este paralelă cu ipotenuza, cantonul nu poate fi construit.

192. Să presupunem că drumul cel mai scurt este $ANMB$ (fig. 70). Construim paralelogramul $NMBB'$. Drumul $ANMB$ se poate înlocui prin $ANB'B$ care conține segmentul $\overline{B'B}$ constant egal cu lățimea rîului. Drumul $ANMB$ va fi deci minim, atunci cînd și linia frîntă ANB' va avea lungimea cea mai mică.

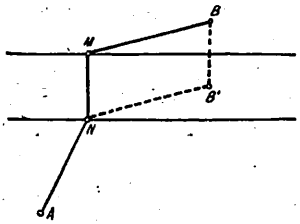


Fig. 70

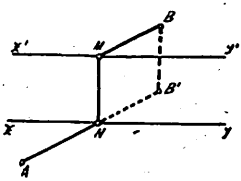


Fig. 71

Aceasta se întîmplă cînd linia ANB' este dreaptă. De aci deducem construcția. Din B se duce un segment $\overline{BB'}$ perpendicular pe maluri și egal în lungime cu lățimea rîului (fig. 71). Se unesc punctele A, B. Acolo unde dreapta AB' taie malul xy, obținem un capăt N al podului. Celălalt capăt M se deduce prin ducerea perpendicularei NM pe dreapta $x'y'$.

193. Să considerăm pătratul $ABCD$ (fig. 72). Patrulaterul $MNPQ$ fiind presupus cu laturile egale $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM}$ este romb. Punctul O de intersecție a diagonalelor rombului este centrul lui de simetrie. Rotind figura cu 180° în jurul lui O, în sensul săgeții, punctul P se va așeza în M, iar M în P. Prin urmare și direcția laturii DC se va așeza peste direcția laturii AB. La fel se arată că direcția laturii AD se așază peste direcția laturii CB. Rezultă deci că punctul O este de asemeni și centrul de simetrie a pătratului. Rotind acum figura în jurul lui O numai cu 90°, latura OP se așază peste ON și pentru că O este și centrul pătratului, latura DC vine peste CB. De aci rezultă că $\overline{OP} = \overline{ON}$.

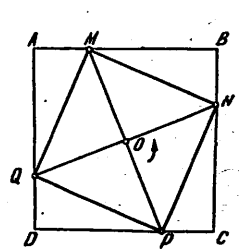


Fig. 72

Rombul are deci diagonalele egale : prin urmare figura $MNPQ$ este pătrat.

194. Să considerăm M un punct al locului din regiunea I a dreptelor D_1, D_2, pentru care suma distanţelor $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ la drep-

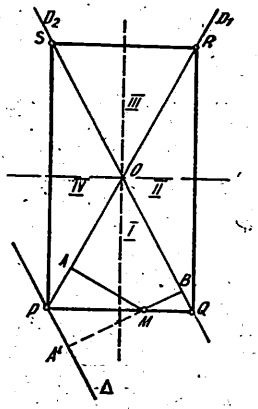


Fig. 73

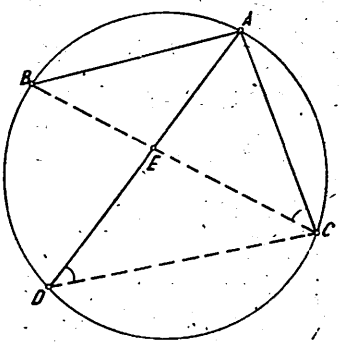


Fig. 74

tele date D_1 şi D_2 este egală cu un segment dat de lungime k (fig. 73). Prelungim $\overline{MB}$ cu segmentul $\overline{MA'} = \overline{MA}$. Punctul A' se află astfel la distanţa $\overline{A'B} = k$ de dreapta D_2. Urmează că A' se află pe o paralelă Δ situată la distanţa k de dreapta D_2.

Deoarece avem $\overline{MA} = \overline{MA'}$ şi $\overline{MA} + \overline{MA'} = k$, punctul M se află pe bisectoarea dreptelor D_1 şi Δ pe porţiunea situată între dreptele Δ şi D_2, adică pe segmentul $\overline{PQ}$. Căutînd locul punctelor M din celelalte regiuni II, III şi IV care împlinesc aceeaşi condiţie, vom găsi, urmînd acelaşi raţionament, segmentele $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$. Rezultă deci că locul căutat este conturul dreptunghiului $PQRS$ ale cărui laturi sînt simetrice faţă de bisectoarele dreptelor D_1 şi D_2 şi astfel ca vîrfurile P, Q, R, S, situate pe una din dreptele D_1 sau D_2 să fie la distanţa k de cealaltă dreaptă.

195. Se observă că triunghiurile ACE și ACD (fig. 74) sînt asemenea, că ele au unghiul EAC comun și $\widehat{ACE} = \widehat{ADC}$ (unghiul $ADC = \widehat{ABC}$ ca avînd aceeași măsură, iar $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, coardele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ fiind egale). Rezultă deci :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

sau :

$$\overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}^2.$$

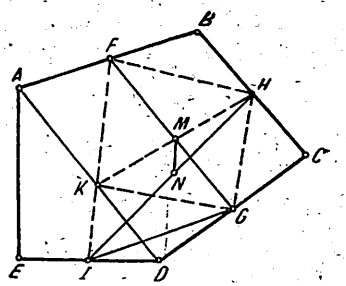


Fig. 75

196. Notăm cu F, H, G, I, mijloacele segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ (fig. 75), iar cu M și N mijloacele segmentelor $\overline{FG}$ și $\overline{HI}$. Dacă însemnăm cu litera K mijlocul segmentului $\overline{AD}$, atunci observăm că patrulaterul $FHGK$ este un paralelogram de unde deducem că HK trece prin mijlocul segmentului $\overline{FG}$, adică prin M. Punctele K și I fiind mijloacele segmentelor $\overline{AD}$ și $\overline{EK}$, rezultă $\overline{KI} \parallel \overline{AE}$ și totodată $\overline{KI} = \frac{\overline{AE}}{2}$. Punctele M și N sînt mijloacele laturilor $\overline{KH}$ și $\overline{IH}$ ale triunghiurilor KHI; prin urmare avem :

$$MN \parallel KI \text{ și } \overline{MN} = \frac{\overline{KI}}{2}.$$

Ținînd seama și de cele deduse mai sus, rezultă :

$$MN \parallel KI \parallel AE \text{ și } \overline{MN} = \frac{\overline{KI}}{2} = \frac{\frac{\overline{AE}}{2}}{2} = \frac{\overline{AE}}{4},$$

ceea ce trebuia dovedit.

197. Fie trapezul $ABCD$ și triunghiul isoscel MNP, ambele figuri înscrise în cercul O (fig. 76).

Baza mare CD fiind diametru trece prin centru, iar triunghiul fiind isoscel are vîrful M în mijlocul arcului $DABC$. Unim O cu A și N; se observă că razele OA și ON sînt perpendi-

culare pentru că avem $\widehat{NOA} = \widehat{NOD} + \widehat{DOA} = \widehat{DOA} + \widehat{AOM} = 90°$. (Unghiurile DON și AOM sînt egale pentru că sînt unghiuri la centru care corespund arcelor egale AM și DN cuprinse între ccardele paralele AD și MN).

Rezultă $\widehat{AOL} = \widehat{ONK}$ ca avînd laturi perpendiculare. Prin urmare triunghiurile dreptunghice AOL și NOK sînt egale avînd

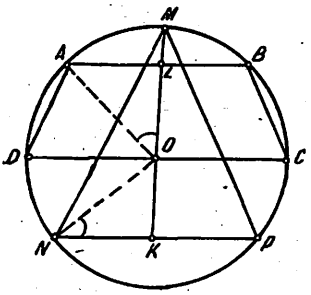


Fig. 76

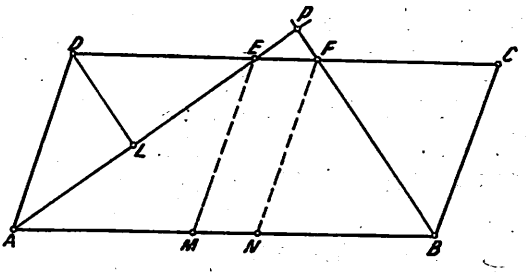


Fig. 77

aceeași ipotenuză $\overline{OA} = \overline{ON} = R$ (raza) și unghiuri ascuțite egale. Avem deci $\overline{OK} = \overline{AL} = \frac{b}{2}$ și $\overline{NK} = \overline{OL} = h$ (b, baza mică a trapezului și h înălțimea lui).

Aria triunghiului MNP are deci valoarea:

$$S = \frac{\overline{NP} \cdot \overline{MK}}{2} = \frac{2\overline{NK} \cdot (\overline{MO} + \overline{OK})}{2} = h\left(R + \frac{b}{2}\right).$$

Aria trapezului este:

$$S_1 = \frac{\overline{OL}(\overline{DC} + \overline{AB})}{2} = \frac{h(2R + b)}{2} = h\left(R + \frac{b}{2}\right),$$

ceea ce demonstrează teorema.

198. 1) Oricum s-ar deforma, patrulaterul rămîne cu laturile opuse egale cîte două: $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ și $\overline{AB} = \overline{DC} = a$ (fig. 77), deci el este paralelogram.

Pentru că $\overline{DE} = \overline{FC} = \overline{AD}$ triunghiurile ADE şi BCF sînt isoscele. Avem, prin urmare: $\widehat{DEA} = \widehat{DAE}$ şi $\widehat{BFC} = \widehat{FBC}$. Din egalitatea unghiurilor $\widehat{DEA} = \widehat{EAB}$ şi $\widehat{BFC} = \widehat{FBA}$, pentru că dreptele DC şi AB sînt paralele tăiate de secantele AE şi BF şi a celorlalte arătate mai sus, rezultă:

$$\widehat{DAE} = \widehat{EAB} \text{ şi } \widehat{FBC} = \widehat{FBA}.$$

Urmează că AE şi BF sînt bisectoarele unghiurilor A şi B. Se observă că în acest caz unghiul P este drept. Într-adevăr, valoarea unghiului P este egală cu $180° - (\widehat{EAB} + \widehat{FBA}) = 180° - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180° - \frac{180°}{2} = 90°$ (A şi B sînt unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei formate de paralelele AD şi CB tăiate de secanta AB).

2) Dacă $a = 3b$ înseamnă că şi $\overline{EF} = b$, pentru că prin ipoteză avem $\overline{DE} = \overline{FC} = \overline{AD} = b$. Ducînd DL paralelă cu PF, triunghiul format DLE este egal cu PFE. Cum $FP \perp EP$ rezultă că şi $DL \perp AE$; prin urmare triunghiul ADL este egal cu DLE şi egal cu EFP.

La fel se arată că şi triunghiul FCB se desface în două triunghiuri egale cu EFP, ceea ce justifică enunţul de la punctul 2.

3) Am demonstrat că unghiul $APB = 90°$; rezultă că din P se vede segmentul fix $\overline{AB}$ sub un unghi drept, deci locul lui P este un cerc cu diametrul AB.

4) Ducînd din E şi F paralele la DA, acestea vor tăia AB în punctele fixe M şi N, pentru că $\overline{AM} = \overline{DE} = b$ şi la fel $\overline{NB} = \overline{FC} = b$.

Lungimile $\overline{EM}$ şi $\overline{FN}$ fiind egale cu $\overline{AD} = b$, urmează că E şi F descriu cercuri cu centrele respective în M şi N şi cu razele egale cu b.

199. 1) Avem: $\widehat{BIC} = 180° - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180° - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 180° - \frac{180° - \hat{A}}{2} = 90° + \frac{\hat{A}}{2} = 90° + \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (fig. 78).

2) Cînd unghiul A rămîne constant, acelaşi lucru se întîmplă şi cu unghiul BIC, pentru că $\widehat{BIC} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$.

Locul lui I este deci un arc de cerc capabil de unghiul $90° + \frac{\hat{A}}{2}$ care trece prin B şi C.

3) Patrulaterul $BICI'$ este inscriptibil pentru că unghiurile IBI' şi ICI' sînt drepte, fiind formate de bisectoarele a cîte două unghiuri suplimentare adiacente. Aşadar, cercul BIC trece prin I'. Diametrul cercului BIC este segmentul $\overline{II'}$.

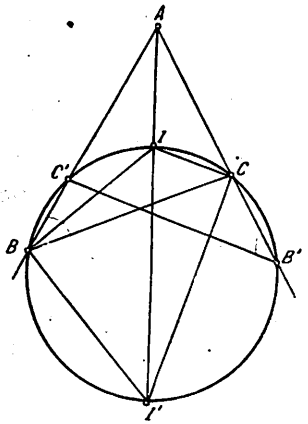


Fig. 78

4) Triunghiurile ABC şi $AB'C'$ au unghiul A comun şi unghiurile $C'BC$, $CB'C'$ egale cu măsura jumătăţii arcului de cerc CC', ele sînt deci asemenea.

200. Din relaţiile : $\frac{\overline{DM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NB}}$ (fig. 79 a) rezultă că dacă $\overline{DM} = MC$, atunci avem şi $\overline{AN} = \overline{NB}$, ceea ce demonstrează că N este mijlocul lui $\overline{AB}$ pentru că M a fost dat mijlocul lui DC.

În triunghiurile dreptunghice EDC şi EAB, dreptele EM şi EN sînt mediane ; de aceea avem :

$$\overline{EN} = \frac{\overline{AB}}{2} \text{ şi } \overline{EM} = \frac{\overline{DC}}{2}, \text{ de unde urmează că :}$$

$$\overline{MN} = \overline{EN} - \overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2}.$$

2) Avem : $\overline{DM} = \overline{MC}$; $\overline{AN} = \overline{NB}$ şi $\overline{AP} = \overline{DM}$ (ca paralele între paralele), la fel avem $\overline{QB} = \overline{MC}$ (tot ca paralele între paralele).

Rezultă : $\overline{AN} - \overline{AP} = \overline{NB} - \overline{QB}$,
sau : $\overline{PN} = \overline{NQ}$, ceea ce dovedeşte că $\overline{MN}$ este mediană în triunghiul PMQ şi deci avem $\overline{MN} = \frac{\overline{PQ}}{2}$.

3) Putem construi cu elementele date, triunghiul dreptunghic PMQ, pentru că avem $\overline{PM} = \overline{AD}$ şi $\overline{PQ} = \overline{2MN}$. Construcţia este următoarea :

Pe segmentul $\overline{PQ} = \overline{2MN}$ ca diametru (fig. 79 b) construim un semicerc. Din P ca centru descriem un arc de cerc cu raza $\overline{PM} = \overline{AD}$. Unind MQ se formează triunghiul PMQ. Ducem din M o paralelă la PQ pe care purtăm de o parte şi de alta segmentele $\overline{MD} = \overline{MC} = \frac{\overline{CD}}{2}$, iar din D şi C ducem paralele la MP şi MQ. Aceste paralele întîlnesc prelungirea lui PQ în A şi B. Avem astfel trapezul construit.

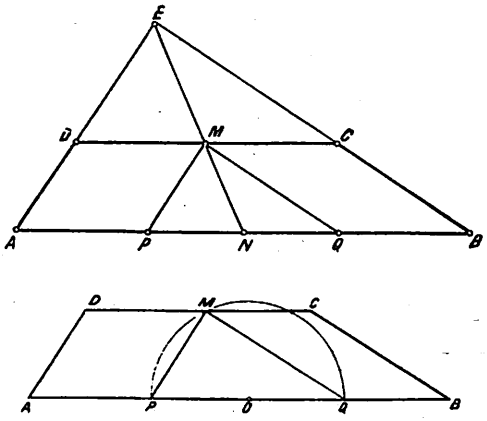


Fig. 79 a, b

201. Pentru ca diferenţa distanţelor $\overline{MA}$ şi $\overline{MB}$ să fie minimă, adică zero. trebuie ca $\overline{MA} = \overline{MB}$. Rezultă că M este situat la intersecţia mediatoarei segmentului $\overline{AB}$ cu dreapta xy (fig. 80).

Observare. În cazul cînd s-ar fi cerut ca diferenţa distanţelor să fie maximă atunci avem în vedere că :

$$\overline{MA} - \overline{MB} \leqslant AB.$$

Se vede că diferenţa maximă poate fi $\overline{AB}$. Aceasta are loc cînd M se află la intersecţia dreptei $\overline{AB}$ cu linia xy (dacă A şi B sînt de aceeaşi parte a dreptei).

Dacă A şi B sînt situate de o parte şi de alta a liniei xy, luăm simetricul B' al lui B şi ţinem seama că (fig. 81) :

$$\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{MA} - \overline{MB'} .$$

Punctele A şi B' fiind acum de aceeaşi parte a dreptei xy,

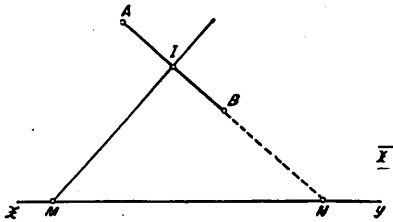


Fig. 80

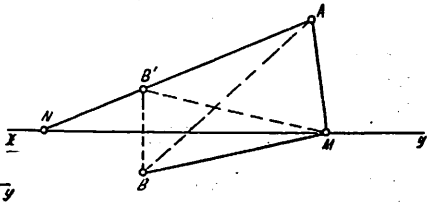


Fig. 81

obţinem diferenţa distanţelor maximă atunci cînd M este situat în N la intersecţia dreptei xy cu AB'.

202. Să considerăm dreapta oarecare Δ ce trece prin centrul de greutate al triunghiului (fig. 82) şi distanţele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$. Ducem din mijlocul M al bazei $\overline{BC}$ segmentul $\overline{MN}$ perpendicular pe Δ. Acest segment este dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor trapezului $BB'CC'$, avem deci :

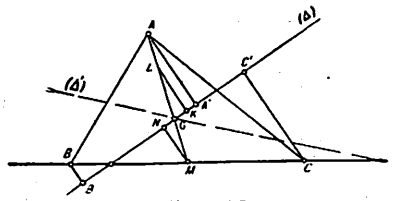


Fig. 82

$$2\overline{MN} = \overline{CC'} - \overline{BB'}. \quad (1)$$

Dacă ducem din mijlocul L al segmentului $\overline{AG}$ o paralelă la AA', se formează triunghiul LGK egal cu NMG. Rezultă că $\overline{LK} = \overline{MN} = \frac{\overline{AA'}}{2}$ şi prin urmare $2\overline{MN} = \overline{AA'}$. Ţinînd seama de acest rezultat şi de (1), obţinem :

$$\overline{AA'} = \overline{CC'} - \overline{BB'},$$

sau :

$\overline{AA'} + \overline{BB'} = \overline{CC'}$, ceea ce demonstrează parţial teorema.

Dacă schimbăm poziția dreptei Δ în Δ' situată de aceeași parte a punctelor B ; C și raționăm întocmai ca mai sus (aci vom avea de-a face cu un trapez în care MN unește mijloacele laturilor neparalele) vom obține același rezultat și astfel se demonstrează complet teorema.

Observare. Cînd Δ are poziția AM atunci distanțele de la B și C la AM, sînt egale, iar cea de la A la Δ este 0, deci și în acest caz este verificată afirmația din enunț, căci din egalitatea $\overline{BB'} = \overline{CC'}$ rezultă și :

$$0 = \overline{BB'} = \overline{CC'}.$$

203. Să presupunem că $\overline{MN}$ este segmentul căutat, astfel ca A să fie mijlocul său (fig. 83). Punctul M face parte din locul simetricelor punctelor de pe dreapta D față de punctul A, care este o dreaptă paralelă cu dreapta dată. Această observație ne permite să rezolvăm problema de construcție.

Se ia un punct oarecare B de pe D și prin simetricul B' al acestuia ducem o paralelă la D. Această paralelă taie cercul dat în două puncte M și M' (în cazul figurii). Unim M și M' cu A apoi prelungim dreptele MA și $M'A$ pînă la întretăierea lor cu D în punctele N și N'. Segmentele MN și $M'N'$ sînt soluțiile problemei. Putem avea două soluții, una sau nici una, după cum simetrica dreptei D este secantă, tangentă sau dreaptă exterioară cercului dat.

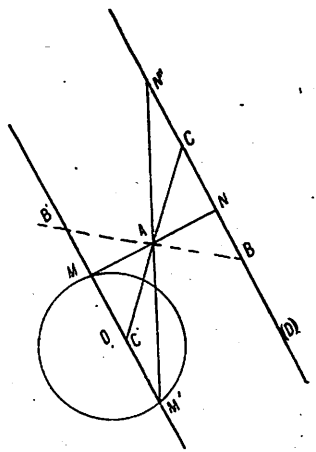


Fig. 83

204. Presupunem triunghiul ABC construit, pe care sînt puse în evidență înălțimea $\overline{AA'} = h$ precum cercul înscris O cu raza dată r și punctele de tangență D, E, F (fig. 84). Coborîm din O perpendiculara OL pe dreapta AA'. Triunghiul dreptunghic format AOL, are ca elemente cunoscute $\overline{AO}$, diagonala

pătratului $ADOE$ cu latura $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{AD} = \overline{AE} = r$ și cateta : $\overline{AL} = \overline{AA'} - \overline{LA'} = \overline{AA'} - \overline{OF} = h - r$. Din constatările făcute rezultă construcția. Pe laturile unui unghi drept A se poartă segmentele $\overline{AD} = \overline{AE} = r$ și se duc paralelele $\overline{EO}$ și DO la laturi. Se formează astfel pătratul $ADOE$. Pe diagonala $\overline{AO}$ ca diametru, se descrie un semicerc și din A ca centru cu raza $\overline{AL} = h - r$ se duce un arc care

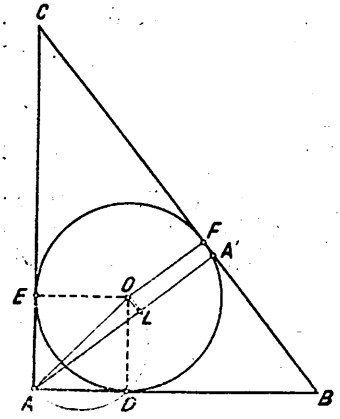


Fig. 84

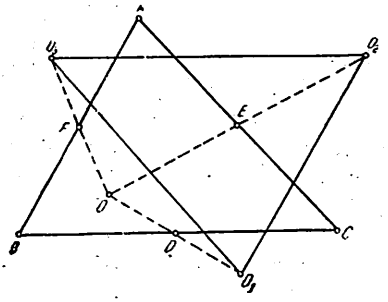


Fig. 85

determină punctul L. Se prelungește $\overline{AL}$ pînă în A' astfel ca $\overline{AA'} = h$. În A' se duce perpendiculara pe AA' care taie laturile unghiului A în celelalte două vîrfuri ale triunghiului.

205. 1) Punctele E și F fiind mijloacele laturilor $\overline{OO_2}$ și $\overline{OO_3}$ (fig. 85) rezultă că $\overline{O_2O_3}$ este paralel cu $\overline{FE}$ și egal cu dublul său. Simultan avem $FE \parallel BC$ și $\overline{FE} = \frac{\overline{BC}}{2}$, rezultă deci că $\overline{O_2O_3}$ este paralel și egal cu $\overline{BC}$, la fel se arată că $\overline{O_1O_2}$ este paralel și egal cu AB iar O_1O_3 paralel și egal cu AC. Așadar triunghiul $O_1O_2O_3$ este egal cu ABC, cele două triunghiuri avînd laturile respectiv egale.

2) Cînd O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci : $OO_1 \perp BC$, $OO_2 \perp AC$ și $OO_3 \perp AB$, rezultă deci că : $OO_1 \perp O_2O_3$; $OO_2 \perp O_1O_3$ și $OO_3 \perp O_1O_2$ (pentru că : $BC \parallel O_2O_3$, $AB \parallel O_1O_2$ și $AC \parallel O_1O_3$) ; prin urmare O este ortocentrul triunghiului $O_1O_2O_3$.

3) Punctul D fiind mijlocul laturii $\overline{OO_1}$ rezultă că centrul de greutate G al triunghiului ABC care e situat la $\frac{2}{3}$ de vîrf pe mediana $\overline{AD}$ este și centrul de greutate al triunghiului AOO_1. Prelungind deci $\overline{OG}$ cu $\frac{\overline{OG}}{2}$, obținem punctul M situat pe OO_1. La fel se vede că G este centrul de greutate și pentru BOO_2 și COO_3, iar M este situat pe OO_2 și OO_3. Așadar, dreptele OO_1, OO_2, OO_3 sînt concurente în M situat pe OG dincolo de G astfel ca $\overline{OG} = 2\overline{GM}$.

206. Ducem din vîrful B al patrulaterului inscriptibil $ABCD$ (fig. 86) o dreaptă BE care să formeze unghiul $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Așa fiind, triunghiurile ABE și BCD sînt asemenea pentru că ele mai au unghiurile egale $\widehat{BAE} = \widehat{BDC}$ ca avînd aceeași măsură, arcul BC. Tot asemenea sînt și triunghiurile BEC și BDA ca avînd:

$$\widehat{EBC} = \widehat{DBA} = \hat{1} + \hat{\alpha} = \hat{2} + \hat{\alpha}$$

și $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$, unghiuri egale avînd măsura jumătății arcului AB.

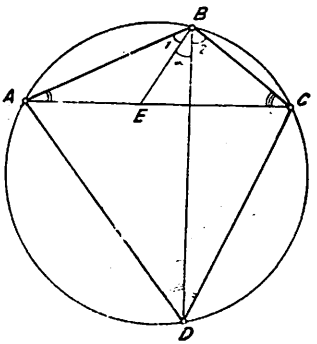


Fig. 86

Din asemănarea $ABE \sim BDC$, deducem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DC}},$$

sau: $\overline{BD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{DC}$,

iar din asemănarea: $BEC \sim BDA$, rezultă:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AD}}$$

și prin urmare: $\overline{BD} \cdot \overline{EC} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$. (2)

Adunînd membru cu membru relațiile (1) și (2), obținem:

$$\overline{BD}.\overline{AE} + \overline{BD}.\overline{EC} = \overline{AB}.\overline{DC} + \overline{BC}.\overline{AD},$$

sau: $\overline{BD}\,(\overline{AE}+\overline{EC})=\overline{BD}.\overline{AC}=\overline{AB}.\overline{DC}+\overline{BC}.\overline{AD}$, ceea ce demonstrează teorema.

207. Teorema este valabilă pentru orice unghi. Să considerăm unghiul NMP (fig. 87) pe a cărui bisectoare luăm punctul A_1. Prin ducerea paralelelor A_1R şi A_1S la dreptele MP şi MN se formează un romb, pentru că $\hat{3}=\hat{1}$ şi $\hat{4}=\hat{2}$ ca alterne interne formate de paralele cu o secantă. Avînd în vedere că $\hat{1}=\hat{2}$, rezultă $\hat{3}=\hat{2}$ şi $\hat{1}=\hat{4}$; prin urmare $\overline{MS}=\overline{SA_1}=\overline{A_1R}=\overline{RM}$. Paralelele A_1R şi A_1S determină segmente proporţionale pe laturile triunghiului MNP, avem deci:

$$\frac{\overline{RA_1}}{\overline{MP}}=\frac{\overline{NA_1}}{\overline{NP}} \text{ şi } \frac{\overline{SA_1}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{A_1P}}{\overline{NP}}.$$

Adunînd egalităţile membru cu membru, obţinem:

$$\frac{\overline{RA_1}}{\overline{MP}}+\frac{\overline{SA_1}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{NA_1}+\overline{A_1P}}{\overline{NP}}=\frac{\overline{NP}}{\overline{NP}}=1.$$

Împărţind ambii membri cu $\overline{RA_1}=\overline{SA_1}$, deducem:

$$\frac{1}{\overline{MP}}+\frac{1}{\overline{MN}}=\frac{1}{\overline{RA_1}}.$$

Relaţia obţinută ne arată că valoarea constantei este $\frac{1}{\overline{RA_1}}$.

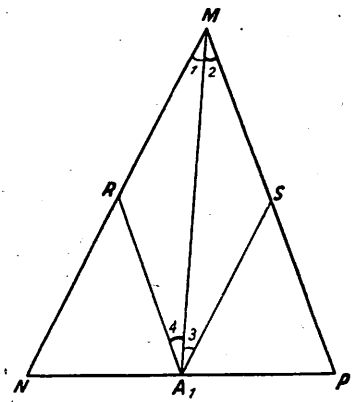


Fig. 87

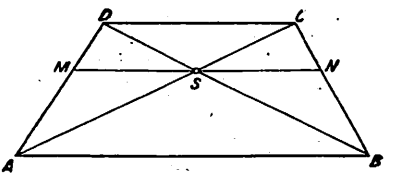


Fig. 88

208. 1) Din triunghiurile asemenea MDS şi ADB (fig. 88) avem:

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{BD}}, \text{ iar din triunghiurile:}$$

SBN și DBC rezultă:

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BD}}.$$

Adunînd membru cu membru, obținem:

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{SN}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{BS}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}} = 1.$$

Avînd în vedere că $\overline{MS} = \overline{SN} = \frac{\overline{MN}}{2}$, deducem:

$$\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{DC}} = \frac{2}{\overline{MN}},$$

ceea ce demonstrează că $\overline{MN}$ este media armonică a segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{DC}$.

2) Dacă $\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$, atunci triunghiurile ABC și CAD sînt asemenea și prin urmare avem:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}.$$

Rezultă:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{DC}},$$

ceea ce trebuia dovedit.

209. Soluția I. În orice triunghi medianele se taie la $\frac{2}{3}$ de vîrf. De unde rezultă că $\overline{GB'} = \overline{GC'}$ și $\overline{GC} = \overline{GB}$, pentru că medianele $\overline{BB'}$ și $\overline{CC'}$ care se taie în G (fig. 89) sînt presupuse egale. Urmează de aci că triunghiurile BGC' și GCB' sînt egale, avînd cîte un unghi la fel de mare ($\widehat{BGC'} = \widehat{CGB'}$) cuprinse între laturile respectiv egale. De unde deducem $\overline{BC'} = \overline{CB'}$ și prin urmare $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Soluția II. Dacă notăm cu a, b, c, laturile triunghiului și medianele din B și C respectiv m_b și m_c, avem:

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2} \text{ și } m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

Scriind că $m_b = m_c$, obținem după ridicarea la pătrat și eliminarea numitorului:

$$2(a^2 + c^2) - b^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2,$$

sau:

$$3c^2 - 3b^2 = 0.$$

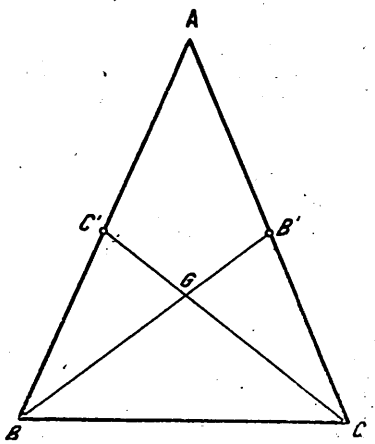


Fig. 89

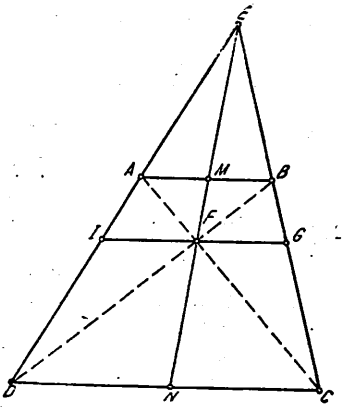


Fig. 90

De unde rezultă:

$$3(c - b)(c + b) = 0,$$

egalitate posibilă numai dacă $c = b$, adică numai cînd triunghiul este isoscel, ceea ce trebuia dovedit.

210. E suficient să demonstrăm că numai paralela la baze ce trece prin punctul de intersecție a diagonalelor, interceptată de laturile neparalele este împărțită în părți egale de către dreapta ce trece prin intersecția laturilor neparalele și a punctului de întîlnire a diagonalelor pentru a trage concluzia că și bazele sînt împărțite de aceeași dreaptă în părți egale.

Considerăm de aceea paralela la baze care trece prin F intersecția diagonalelor AC și BD (fig. 90).

Avem:

$$\frac{\overline{IF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DA}} \text{ și } \frac{\overline{FG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CB}}.$$

Din teorema care arată că mai multe paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale, deducem :

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CB}}$$

și prin urmare :

$$\frac{\overline{IF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AB}}.$$

Rezultă $\overline{IF} = \overline{FG}$, deci $\overline{AM} = \overline{MB}$ și $\overline{DN} = \overline{NC}$ ceea ce demonstrează teorema.

211. Construcția se bazează pe observația că o dreaptă care trece prin vîrful unui unghi împarte toate segmentele paralele, interceptate de laturile unghiului, în același raport.

Urmează deci să ducem un segment oarecare prin M care are extremitățile A și B pe laturi. Construim apoi un segment CD paralel cu primul (fig. 91). Pe acest segment vom construi un punct N astfel ca :

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}.$$

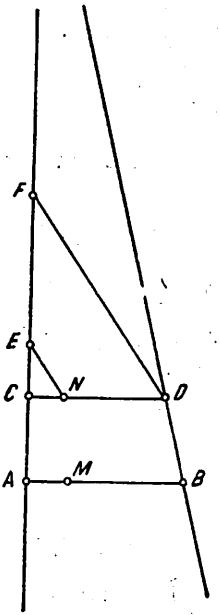


Fig. 91

În vederea acestui scop purtăm de la C spre vîrful unghiului, pe latura pe care se află așezat C, segmentele $\overline{CE} = \overline{AM}$ și $\overline{EF} = \overline{MB}$.

Unim F cu D, iar din E ducem o paralelă la FD care taie segmentul $\overline{CD}$ în punctul N.

Avem :

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}},$$

de aceea dreapta MN este aceea pe care o căutăm.

Propunem cititorilor să găsească o altă soluție care se bazează pe concurența înălțimilor unui triunghi, alegînd pe M ca ortocentru.

Observare. În cazul cînd F cade în afara foii, se vor purta segmentele $\overline{CE}$ şi $\overline{EF}$ în partea opusă.

212. Să rezolvăm întîi o problemă mai generală. Fiind dat raportul:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = k,$$

să determinăm raportul: $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$.

Triunghiurile APQ şi QCD sînt asemenea avînd laturile AP şi BC paralele (fig. 92). Rezultă deci:

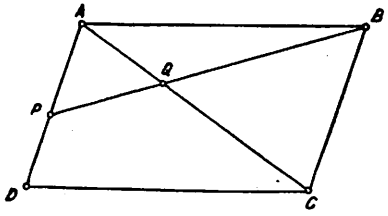


Fig. 92

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{k}{1}.$$

Aplicînd o proprietate a proporţiilor, găsim:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AQ}+\overline{QC}} = \frac{k}{k+1} \text{ sau } \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{k}{k+1},$$

ceea ce trebuia aflat.

În cazul din problemă, avem: $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{1}{n}$, deci: $k = \frac{1}{n}$, rezultă:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1},$$

ceea ce trebuia dovedit.

213. Să presupunem problema rezolvată şi ABC triunghiul căutat (fig. 93). Pe baza celor cuprinse în enunţ, sînt date laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi mediana $\overline{AM}$. Dacă prelungim $\overline{AM}$ cu lungimea egală cu ea $\overline{MA'} = \overline{AM}$ şi unim A' cu B, se formează un paralelogram $ABA'C$ pentru că diagonalele $\overline{AA'}$ şi $\overline{BC}$ se taie în părţi egale.

Rezultă că $\overline{CA'} = \overline{AB}$.

Triunghiul ACA' cuprinde elementele date $\overline{AC}$, $\overline{CA'} = \overline{AB}$ și $\overline{AA'} = 2\overline{AM}$. El poate fi deci construit. Rezultă de aci modul de a rezolva problema.

Se construiește triunghiul ACA' cu laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ și $2\ \overline{AM}$. Se unește C cu mijlocul M al lui $\overline{AA'}$ care se prelungește cu segmentul $\overline{MB} = \overline{CM}$. Unim A cu B și astfel obținem triunghiul căutat.

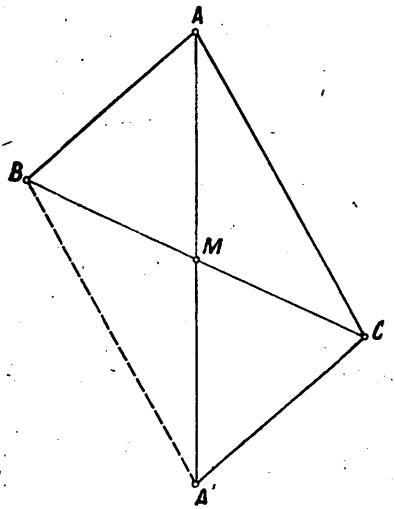


Fig. 93

214. Presupunem problema rezolvată și fie ABC triunghiul căutat (fig. 94). Unghiurile ABQ și ACR sînt egale avînd laturile perpendiculare ($BA \perp CR$ și $BQ \perp CA$) rezultă că și arcele AQ și AR sînt de asemenea egale. Urmează că vîrful A al triunghiului se află în mijlocul arcului RQ. La fel se arată că punctele B și C sînt așezate respectiv în mijloacele arcelor PR și QP. Construcția triunghiului ABC este o consecință a celor constatate mai sus.

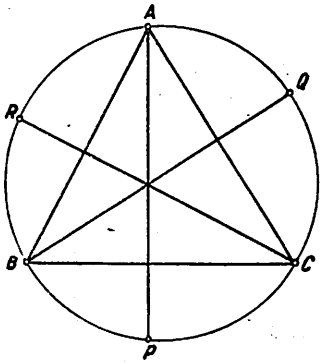


Fig. 94

Punctele P, Q, R fiind date, se construiesc mijloacele arcelor PQ, QR și RP. Unind aceste mijloace obținem triunghiul ABC.

215. Ducînd înălțimile $\overline{BB'}$ și $\overline{CC'}$ (fig. 95) în triunghiul ascuțitunghi ABC, se formează prin unirea punctelor B', B', triunghiul $AB'C'$ asemenea cu ABC.

Într-adevăr, pentru că patrulaterul $BC'B'C$ este inscriptibil ($\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 90°$), $\widehat{C}_1' = \widehat{C}$ ca avînd același supliment unghiul $BC'B'$; rezultă că triunghiurile $AC'B'$ și ABC au cîte două unghiuri respectiv egale și deci sînt asemenea.

216. Fie A și B două puncte date și M un punct variabil

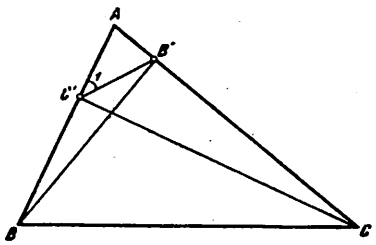


Fig. 95

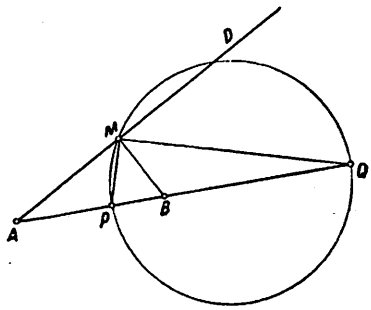


Fig. 96

astfel ca raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$ (constant), să aflăm locul punctului M.

Pe dreapta AB se găsesc două puncte P și Q care împart segmentul AB în același raport t (conjugate armonice).

Deoarece avem:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = t,$$

rezultă că punctele P și Q aparțin locului. Folosindu-ne de aceste puncte P și Q și de A, B să precizăm locul lui M (fig. 96).

Din relațiile:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = t,$$

deducem că MP este bisectoarea unghiului AMB, iar QM este bisectoarea unghiului exterior BMD. Rezultă că unghiul PMQ (format de bisectoarele a două unghiuri suplimentare adiacente) este drept. Din punctul M se vede segmentul fix $\overline{PQ}$ sub un unghi de 90°; prin urmare locul lui M este cercul descris pe

segmentul $\overline{PQ}$ (care unește conjugatele armonice ce împart segmentul $\overline{AB}$ în același raport t) ca diametru.

217. Fie date razele $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ (fig. 97) să găsim coarda $\overline{MQ}$, care să fie împărțită în părți egale de aceste 2 raze. Pe coarda $\overline{AB}$ se iau segmentele $\overline{BE} = \overline{AD} = \overline{AB}$ și se unește O cu D și E, punctele de intersecție M și Q ale dreptelor OD și OE cu cercul ne dau coarda cerută.

218. Să presupunem construite corzile $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ pe baza datelor problemei și să analizăm relațiile dintre elementele necunoscute și cele date.

Dacă unim punctele date A și B ca și C și D, se formează trapezul isoscel $ABCD$ (fig. 98). Unim mijlocul M al distanței $\overline{AB}$ cu mijlocul N al distanței $\overline{CD}$. Avem :

$$\overline{MN} = \frac{AD + BC}{2}.$$

Așadar, $\overline{MN}$ este egal cu jumătate din suma lungimilor corzilor care a fost dată egală cu un segment pe care-l notăm cu a. Se mai observă că punctul N mijlocul lui $\overline{DC}$ este depărtat de O, centrul cercului, tot atît cît și M, pentru că triunghiurile

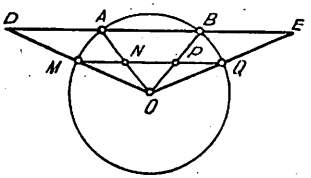


Fig. 97

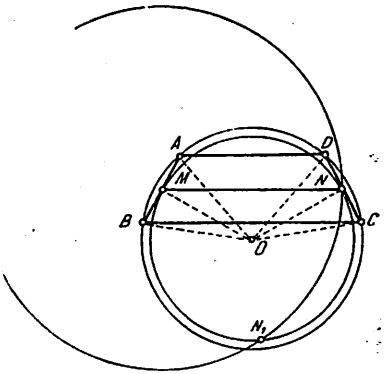


Fig. 98

isoscele AOB și COD sînt egale ($\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD}$ ca raze ale aceluiași cerc, iar $\overline{AB} = \overline{CD}$ fiind laturile neparalele ale unui trapez isoscel). Triunghiul MON se poate deci construi avînd $\overline{ON} = \overline{OM}$ și $\overline{MN} = \frac{a}{2}$.

Urmează deci construcția. Din M ca centru și cu o rază egală cu $\frac{a}{2}$ descriem un cerc. Din O ca centru și cu o rază egală cu $\overline{OM}$ descriem un alt cerc. Aceste cercuri se taie, în general, în două puncte N și N_1. Unim acel punct N din interiorul cercului cu M, iar din B ducem paralele la MN; obținem astfel cele două corzi.

Problema poate admite două soluții, una sau nici una.

Propunem ca cititorii să examineze condițiile care determină numărul de soluții.

219. Se poate constata că dacă latura este de două ori mai mare decît mediana corespunzătoare, triunghiul este dreptunghic.

Într-adevăr, dacă $\overline{BC} = 2\,\overline{AM}$ (fig. 99), înseamnă că $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$ și prin urmare triunghiurile AMC și AMB sînt isoscele. Dacă notăm unghiul $\widehat{MAB} = u$ și $\widehat{MAC} = v$, atunci $\widehat{ABM} = u$ și $\widehat{ACM} = v$.

Rezultă $2u + 2v = 180°$ și prin urmare $u + v = \widehat{BAC} = 90°$, adică triunghiul BAC este dreptunghic.

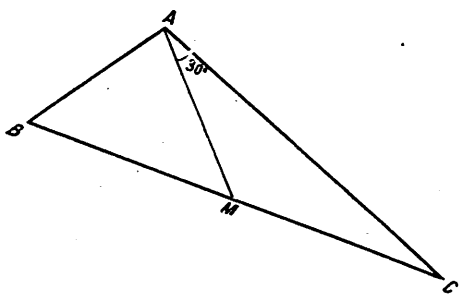


Fig. 99

În cazul din problemă avem : $\overline{AM} = 4\ dm$, $\overline{BC} = 8\ dm$, iar $\widehat{MAC} = 30°$. Rezultă : $\widehat{ACB} = 30°$, $\widehat{ABM} = 60°$ și $\widehat{BAM} = 60°$. Triunghiul AMB este deci echilateral; obținem $\overline{AB} = \overline{AM} = 4$, iar $\overline{AC} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$. Aria triunghiului este :

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

220. Să presupunem trasate cele trei cercuri cu centrele date, A, B, C (fig. 100). Tangentele comune în A', B' și C' se

întîlnesc în același punct I, care este punctul de întîlnire al bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC, pentru că avem $\overline{IA'} = \overline{IB'} = \overline{IC'}$ (tangentele duse din același punct la un cerc sînt egale, iar tangenta comună este perpendiculară pe linia centrelor).

Din cele spuse mai sus rezultă deci următoarea soluție.

Se construiește punctul I de concurență al bisectoarelor

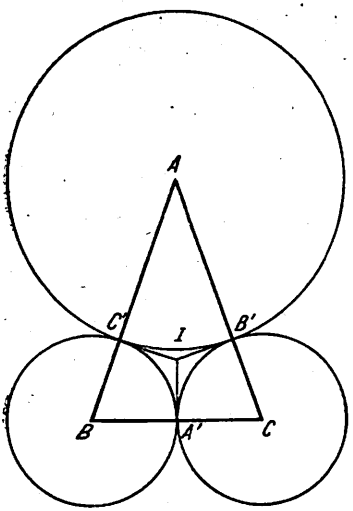


Fig. 100

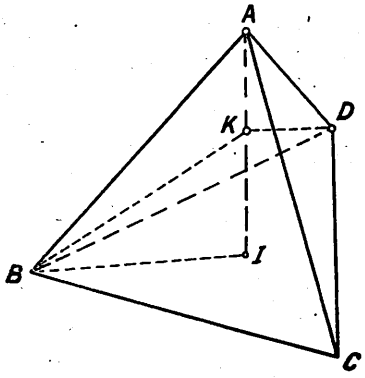


Fig. 101

interioare triunghiului ABC, din I se lasă perpendicularele IA', IB', IC' pe laturile BC, AC, AB. Cercurile cu centrele în A, B, C și cu razele $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$ și $\overline{CA'}$ sînt cele căutate.

221. Fie K mijlocul înălțimii AI a tetraedrului $ABCD$ de muchie l (fig. 101).

Avem :

$$\overline{BK}^2 = \overline{KI}^2 + \overline{BI}^2 = \frac{\overline{AI}^2}{4} + \overline{BI}^2 = \frac{l^2}{6} + \frac{l^2}{3};$$

$$\overline{BK}^2 = \frac{l^2}{2}.$$

La fel găsim : $\overline{CK}^2 = \overline{DK}^2 = \frac{l^2}{2}$.

Deducem :

$$\overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 = \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = l^2 = BC^2.$$

Aşadar, triunghiul BKC este dreptunghic cu unghiul drept în K. La fel se arată că $CK \perp DK$ şi $DK \perp BK$.

222. Secţionînd unghiul tetraedric cu un plan oarecare, obţinem patrulaterul $ABCD$ (fig. 102). Laturile opuse ale patrulaterului, două cîte două, se întretaie în punctele E şi F.

Pentru a obţine în secţiune un paralelogram $abcd$,

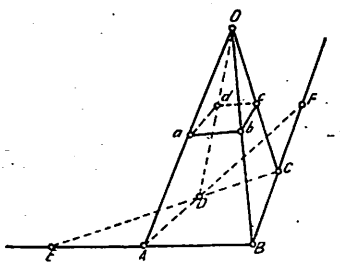


Fig. 102

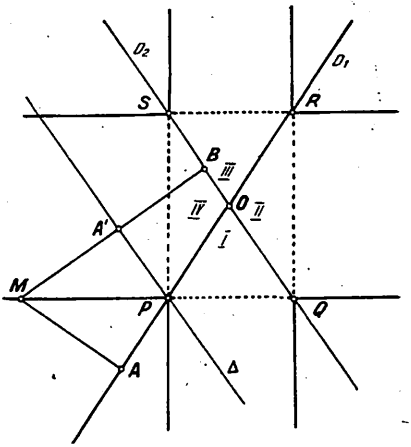


Fig. 103

printr-un plan P, observăm că laturile opuse ab şi cd, dacă n-ar fi paralele, s-ar intersecta pe dreapta OE, iar ad şi bc pe dreapta OF. Urmează din această observaţie că pentru a obţine în secţiune un paralelogram trebuie să secţionăm unghiul tetraedric convex, printr-un plan paralel cu EOF.

223. Suma unghiurilor exterioare ale unui poligon convex e 360°. Unui unghi interior ascuţit îi corespunde un unghi exterior obtuz. Rezultă din această observaţie că asemenea unghiuri sînt mai puţin de $\frac{360°}{90°} = 4$, deci cel mult 3.

224. Folosind aceleaşi notaţii ca în problema 194, purtăm pe MB (fig. 103) segmentul $\overline{MA'} = \overline{MA}$; deoarece avem $\overline{MB} - \overline{MA} = k$, rezultă că $\overline{MB} - \overline{MA'} = \overline{A'B} = k$. Punctul

A' se mişcă deci pe o dreaptă fixă Δ paralelă cu D_2 şi la distanţă k de aceasta. Se observă că din cauză că avem $\overline{MA} = \overline{MA'}$, locul lui M este bisectoarea unghiului dreptelor Δ şi D_1 pe porţiunea situată în afara dreptelor Δ şi D_2. Rezultă deci că locul căutat este format de prelungirile laturilor dreptunghiului $PQRS$ din problema 194. (A şi B sînt picioarele perpendicularelor coborîte din M pe dreptele D_1 şi D_2).

225. Fie AA', BB' şi CC' înălţimile triunghiului ABC; N, P, Q proiecţiile lui M pe BC, AC şi AB; A'' punctul de intersecţie a lui AA' cu DE (fig. 104).

Avem:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AA''}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{AA'} - \overline{MN}}{\overline{AA'}} = 1 - \frac{\overline{MN}}{\overline{AA'}}.$$

Dar:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AA'}} = \frac{S'(BMC)}{S(ABC)}$$ (raportul ariilor a două triunghiuri care au aceeaşi bază $\overline{AB}$).

Deci:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = 1 - \frac{S'(BMC)}{S(ABC)} \qquad (1)$$

la fel:

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{CA}} = 1 - \frac{S''(CMA)}{S(ABC)} \qquad (2)$$

şi:

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{S''(AMB)}{S(ABC)} \qquad (3)$$

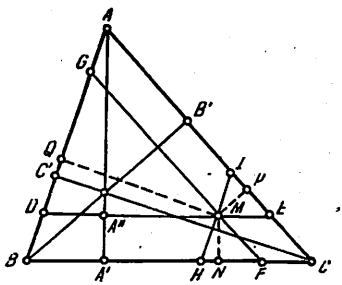


Fig. 104

Adunînd, avem:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{HI}}{\overline{AB}} = 3 - \frac{S' + S'' + S'''}{S} = 3 - \frac{S}{S} = 3 - 1 = 2.$$

226. a) Presupunem problema rezolvată. Fie A_1B_1 secanta cerută, iar M şi N proiecţiile centrelor O şi O' ale celor două cercuri pe această secantă.

Avem :

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AB_1}} = \frac{m}{n} \text{ și } \frac{\frac{\overline{A_1A}}{2}}{\frac{\overline{AB_1}}{2}} = \frac{m}{n}, \text{ deci : } \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \frac{m}{n}.$$

Ducem : $OM \perp A_1B_1$, $O'N \perp A_1B_1$ și $AP \perp A_1B_1$, deci :

$$OM \parallel AP \parallel O'N.$$

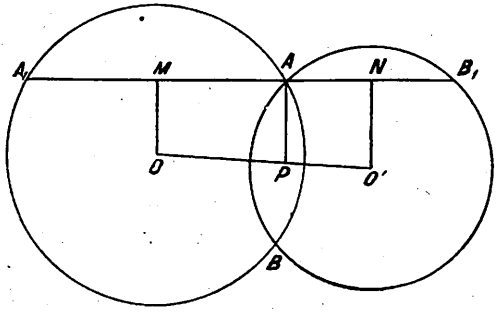


Fig. 105

Prin urmare, segmentele $\overline{MA}$, $\overline{AN}$, $\overline{OP}$, și $\overline{PO'}$ sînt proporționale :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PO'}} = \frac{m}{n}.$$

Procedăm deci în felul următor : construim punctul P care împarte linia centrelor OO' în raportul $\frac{m}{n}$, unim punctul P cu A și în A ducem perpendiculara A_1B_1 pe AP. Dreapta A_1B_1 va fi secanta cerută. Cealaltă secantă A_2B_2 se construiește în mod analog. Cele două secante A_1B_1 și A_2B_2 sînt simetrice în raport cu OO'.

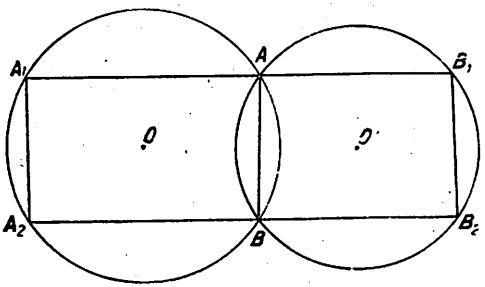


Fig. 106

Observare. Construcția celei de-a doua secante poate fi făcută prin simetrie.

Din $A_1A_2 \perp OO'$; $AB \perp OO'$ (coarda comună pe linia centrelor) și $B_1B_2 \perp OO'$, rezultă : $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel AB$.

b) În cazul cînd A_1 și A_2 coincid, coincidența are loc în punctul D situat pe axa de simetrie OO'. Ducem $OM \perp DE$; $O'N \perp DE$, deci $OM \| O'N$ și să calculăm raportul $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$.

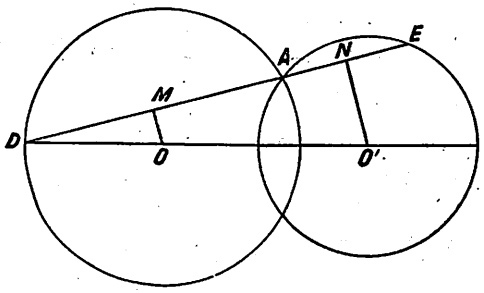


Fig. 107

Avem:

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OO'}},$$

sau $\dfrac{\frac{\overline{AD}}{2}}{R} = \dfrac{\overline{MA} + \overline{AN}}{d}$,

sau: $\dfrac{\overline{AD}}{2R} = \dfrac{\frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AE}}{2}}{d} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{AE}}{2d}$,

sau: $\dfrac{\overline{AD}}{2R} = \dfrac{\overline{AE}}{2(d-R)}$; $\dfrac{\overline{AD}}{R} = \dfrac{\overline{AE}}{d-R}$

de unde:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{R}{d-R}.$$

Observare. $\overline{OD} = R$, $\overline{OO'} = d$.

227. Presupunem $ABCD$ patrulaterul neplan cu laturile tangente unei sfere în punctele M, P, Q, N (fig. 108). Avînd în vedere că tangentele duse dintr-un punct exterior unei sfere sînt egale, deducem:

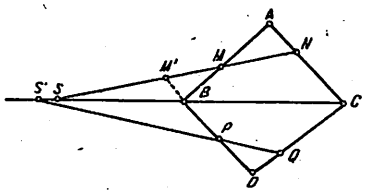


Fig. 108

$$\overline{AM} = \overline{AN}\ ;\ \overline{BM} = \overline{BP};$$

$$\overline{DP} = \overline{DQ}\ ;\ \overline{CN} = \overline{CQ}.$$

Tragem din B o paralelă la CA. Aceasta taie prelungirea dreptei MN în punctul M'. Triunghiul BMM' fiind asemenea

cu triunghiul isoscel AMN, avem $\overline{BM} = \overline{BM'}$. Triunghiul BSM' format de prelungirile dreptelor BC şi MN, care se taie în S şi dreapta BM' este asemenea cu CSN, rezultă deci :

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{BM'}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}}.$$

În mod analog luăm dreapta PQ care uneşte celelalte puncte de tangenţă ale laturilor patrulaterului neplan. Această dreaptă taie prelungirea dreptei BC în S'; raţionînd identic ca înainte găsim :

$$\frac{\overline{S'B}}{\overline{S'C}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}},$$

însă :

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}} \left(\overline{BP} = \overline{BN} \; ; \; \overline{CQ} = \overline{CN}\right);$$

rezultă deci :

$\frac{\overline{S'B}}{\overline{S'C}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}$, ceea ce înseamnă că punctele S şi S' sînt confundate. Dreptele MN şi PQ fiind concurente, înseamnă că P, Q, M, N sînt în acelaşi plan.

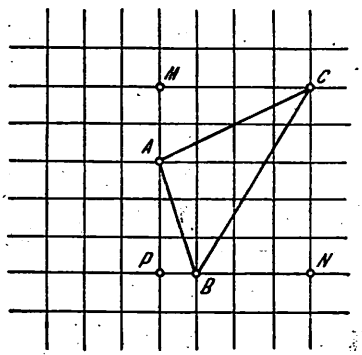


Fig. 109

228. Să presupunem că am construit un astfel de triunghi (fig. 109). Aria acestui triunghi a cărui latură o notăm cu a se exprimă prin diferenţa dintre dreptunghiul $MCNP$ şi suma triunghiurilor dreptunghice :

$$MAC + APB + BNC.$$

Din cauză că latura fiecărui pătrăţel este 1, ariile dreptunghiului şi a triunghiurilor dreptunghice se exprimă prin numere raţionale; prin urmare şi aria triunghiului echilateral exprimat prin ele ar fi un număr raţional.

Pe de altă parte știm că aria triunghiului echilateral cu latura a este egală cu:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

cu observarea că a^2 fiind pătratul ipotenuzei oricărui triunghi dreptunghic MAC, APB și BNC, este un număr rațional: $(a^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MC}^2)$.

Ar urma din această constatare că în cazul cînd s-ar putea construi un triunghi echilateral cu vîrfurile sale plasate în trei noduri ale rețelei să avem un număr rațional egal cu un număr irațional, ceea ce este imposibil. Deducem, prin urmare, că un astfel de triunghi nu există.

229. Coardele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ (fig. 110) fiind egale sînt simetric așezate față de diametrul ce trece prin A. Prelungim $\overline{BC}$ de o parte și de alta cu segmentele $\overline{BD}$ și $\overline{CE}$, astfel ca să avem:

$$\overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CE}.$$

Unind D și E cu A se obțin pe cerc punctele M și Q. Segmentul MQ este coarda căutată. Într-adevăr, din cauza simetriei figurii față de diametrul AO, coarda $\overline{MQ}$ este paralelă cu DE și pentru că $\overline{DB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ sînt egale, atunci și segmentele $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ proporționale cu cele de pe DE sînt de asemeni egale.

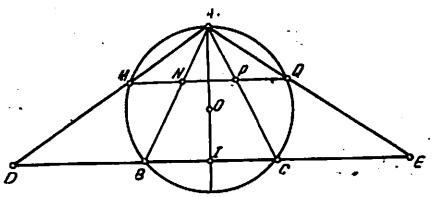


Fig. 110

Observare. În cazul cînd coardele egale se întretaie în interiorul cercului (fig. 111), construcția e analogă. Se prelungește segmentul $\overline{BC}$ cu segmentele egale $\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{BC}$ și se unește L cu E și F. Se obțin coardele $\overline{M_1N_1}$ și $\overline{M_2N_2}$.

Cînd intersecţia L a coardelor egale este situată în afara cercului (fig. 112), se procedează în acelaşi mod. Se uneşte L cu extremităţile E şi F ($\overline{BC} = \overline{BE} = \overline{CF}$). Dacă LE şi LF intersectează cercul avem ca soluţii coardele $\overline{M_1N_1}$, $\overline{M_2N_2}$ sau în caz de tangenţă o singură soluţie.

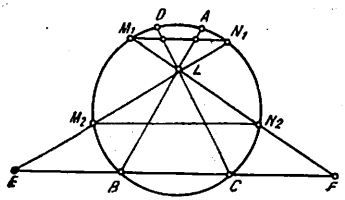


Fig. 111

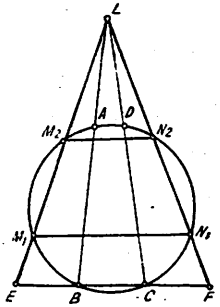


Fig. 112

230. Dacă notăm laturile triunghiului ABC cu $a = \overline{BC}$; $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, cu h înălţimea din C, cu r, r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ADC şi BDC (fig. 113) şi ţinem seama că raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic este egală cu semidiferenţa dintre suma catetelor şi ipotenuză, avem :

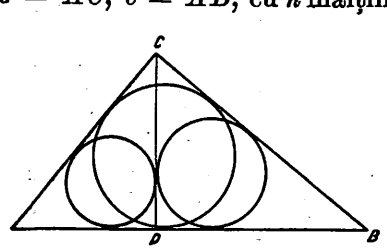


Fig. 113

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad r_1 = \frac{\overline{AD}+h-b}{2} \text{ şi } r_2 = \frac{\overline{BD}+h-a}{2}.$$

Calculăm :

$$r + r_1 + r_2 = \frac{a+b-c+(AD+BD)+h-b+h-a}{2} =$$

$$= \frac{a+b-c+c+h-b+h-a}{2} = h,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

231. Dacă notăm cu h_a înălțimea corespunzătoare laturii a, cu r raza cercului înscris în triunghi și cu S aria triunghiului, avem :

$$2S = ah_a = r\,(a + b + c). \qquad /1/$$

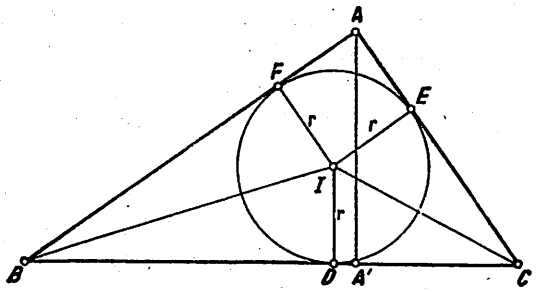


Fig. 114

Înlocuim în relația (1) pe $b + c$ cu $2a$, de unde deducem :

$$h_a = 3r,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

232. *Metoda I.* Oricare ar fi poziția punctului M (fig. 115), pe dreapta AB, avem relațiile :

$$\overline{AM} = \overline{AS} + \overline{SM}$$

și :

$$\overline{MB} = \overline{SB} - \overline{SM}, \quad (1)$$

unde am considerat segmentele cu semn ($\overline{AM} = -\overline{MA}$).

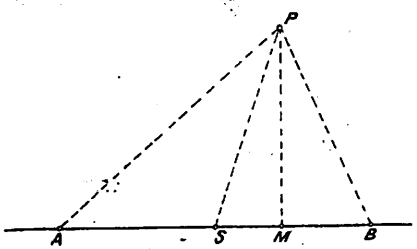


Fig. 115

Ridicînd relațiile (1) la pătrat și adunînd membru cu membru, obținem :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SM}^2 + 2\cdot\overline{AS}\cdot\overline{SM} + \overline{SB}^2 - 2\,\overline{SB}\cdot\overline{SM} + \overline{SM}^2.$$

Efectuînd reducerile, unde ţinem seama că $\overline{SA}^2 = \overline{SB}^2$ deducem :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,\overline{SA}^2 + 2\,\overline{SM}^2.$$

Metoda II. Considerăm un punct P situat în afara dreptei AB (fig. 115) pe care-l unim cu A, S şi B. În triunghiul APB format, segmentul $\overline{PS}$ este mediană.

Aplicînd teorema medianei, obţinem :

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PS}^2 + 2 \cdot \overline{AS}^2. \qquad (2)$$

Mişcînd punctul P pînă la confundarea sa cu M, relaţia (2) rămîne mereu valabilă. Cînd P se confundă cu M, obţinem :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \\ = 2\,.\,\overline{SM}^2 + 2 \cdot \overline{AS}^2.$$

adică tocmai relaţia ce trebuie demonstrată.

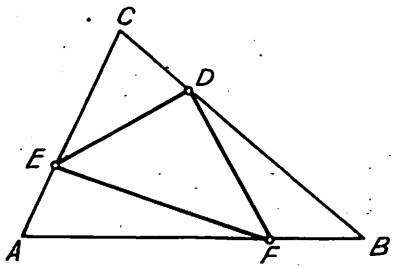


Fig. 116

233. Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC (fig. 116) şi cu s aceea a triunghiului DEF, avem :

$$s = S - (\text{aria } AFE + \text{aria } BDF + \text{aria } CED).$$

Aria triunghiului AFE este egală cu :

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AE} \sin \overline{A}, \text{ totodată avem :}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \sin A, \text{ de unde rezultă :}$$

$$S_1 = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \cdot S = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot S.$$

La fel găsim aria $BDF = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot S$ şi aria $CED = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot S$.

Deducem :

$$s = S - \frac{3k}{(k+1)^2} \cdot S = \frac{k^3 - k + 1}{(k+1)^2} \cdot S.$$

234. Fiecare din aceste tetraedre posedă o față ce trece prin centrele a trei fețe ale cubului. Din această observație se deduce că partea comună a tetraedrelor e poliedrul ale cărui vîrfuri sînt centrele fețelor cubului, care este un octaedru regulat.

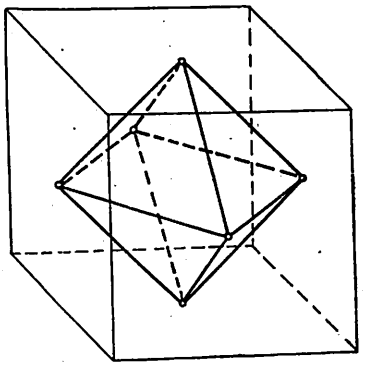


Fig. 117

Volumul acestuia se află înmulțind baza pătrată comună celor două piramide din care e format octaedrul prin a treia parte din distanța între vîrfurile situate de o parte și de alta a bazei pătrate.

Dacă notăm cu a muchia cubului, atunci aria bazei pătrate a octaedrului este egală cu $\frac{a^2}{2}$ și prin urmare volumul octaedrului este :

$$V = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{6}.$$

235. Fețele unui poliedru sînt poligoane al căror cel mai mic număr de laturi poate fi trei.

Un poliedru cu șapte muchii, dacă ar exista, nu ar putea avea nici o față cu un număr mai mare de trei laturi. Într-adevăr, dacă ar exista o față patrulateră, atunci pe lîngă cele patru laturi s-ar mai adăuga și muchiile ce ar pleca din vîrfurile A, B, C, D (fig. 118), adică cel puțin încă 4 muchii, ceea ce ar totaliza mai mult de șapte muchii. Raționînd în mod analog deducem că un

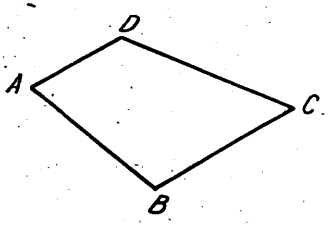


Fig. 118

poliedru cu şapte muchii nu ar putea avea feţe pentagonale, exagonale etc.... Rămîne să examinăm cazul cînd am porni de la o faţă triunghiulară ABC. Se pot întîmpla următoarele cazuri:

a) Cele trei muchii ce pleacă din A, B, C, (fig. 119 a) se întîlnesc în acelaşi punct D, atunci obţinem un tetraedru,

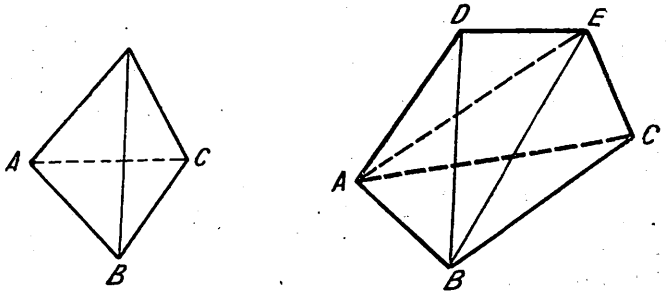


Fig. 119 a, b,

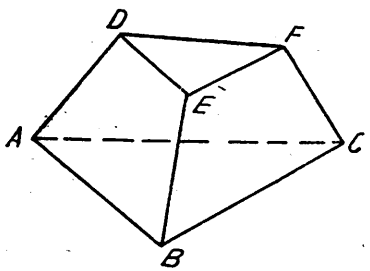


Fig. 119 c

adică un poliedru cu 6 muchii.

b) Două muchii ce pleacă de exemplu din A şi B se întîlnesc în D şi a treia din C nu trece prin D, atunci obţinem un poliedru cu cel puţin 8 muchii.

c) Cele trei muchii ce pleacă din A, B, C, n-au nici un punct comun; în acest caz se adaugă cel puţin încă trei muchii adică poliedrul ce se obţine are cel puţin 9 muchii. Rezultă că în nici un caz nu obţinem un poliedru cu 7 muchii, ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

236. Vom demonstra în prealabil că unghiul unei feţe a unui triedru este mai mic decît suma unghiurilor celorlalte două feţe ale triedrului. E suficient să arătăm că cel mai mare dintre cele trei unghiuri ale feţelor unui triedru este mai mic

decît suma celorlalte două. Fie acest unghi AVB (fig. 120), să demonstrăm că $\widehat{AVB} < \widehat{AVC} + \widehat{CVB}$. Ducem dreapta VD în planul AVB al triedrului $VABC$, astfel ca $\widehat{DVA} = \widehat{CVA}$ din cauză că $\widehat{AVB}$ este cel mai mare unghi, dreapta VD cade în interiorul unghiului $\widehat{AVB}$. Luăm segmentele egale $\overline{VD} = \overline{VC}$ și prin A ducem planul DAC care taie a treia muchie în B. Triunghiurile DAV și CAV fiind egale, rezultă $\overline{AD} = \overline{AC}$. Apoi din neegalitatea :

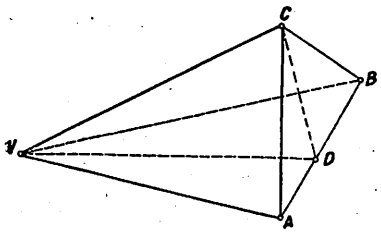


Fig. 120

$$\overline{AD} + \overline{DB} < \overline{AC} + \overline{CB},$$ deducem $\overline{DB} < \overline{CB}$.

Triunghiurile DVB și BVC au $\overline{DV} = \overline{CV}$ și BV comună, iar $\overline{DB} < CB$, de unde rezultă :

$$\widehat{DVB} < \widehat{BVC}. \qquad (1)$$

Adunînd la ambii membri ai neegalității (1) termenii $\widehat{AVD} = \widehat{AVC}$, obținem :

$$\widehat{AVD} + \widehat{DVB} < \widehat{AVC} + \widehat{BVC},$$

sau :

$$\widehat{AVB} < \widehat{AVC} + \widehat{BVC},$$

ceea ce trebuia dovedit.

Și acum să considerăm patrulaterul strîmb $ABCD$ cu diagonala BD ca muchie comună a diedrului format din triunghiurile ABD și CBD ale patrulaterului (fig. 121). Avem, pe baza celor de mai sus :

$\widehat{ABC} < \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$ și

$\widehat{ADC} < \widehat{ADB} + \widehat{BDC}$,

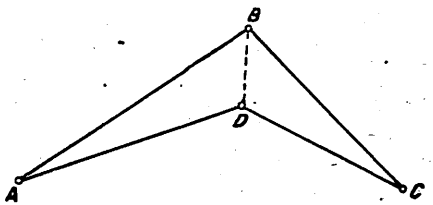


Fig. 121

sau :

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} + \widehat{BAD} + \widehat{BCD} < (\widehat{ABD} + \widehat{BDC} + \widehat{BAD}) +$$

$$+ (\widehat{DBC} + \widehat{BDC} + \widehat{BCD})$$

adică :

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} + \widehat{BAD} + \widehat{BCD} < 180° + 180° = 360°$, ceea ce trebuia dovedit.

237. 1) Dacă $\overline{AP} = x$, atunci razele cercurilor O_1 și O_2 (fig. 122) sînt respectiv $\frac{x}{2}$ și $a - \frac{x}{2}$, iar distanța centrelor este $\overline{O_1O_2} = a$.

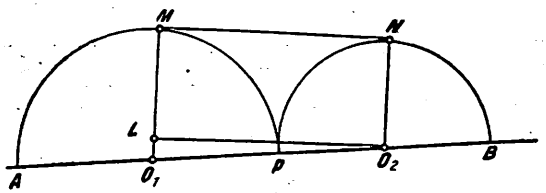


Fig. 122

Ducem din centrul O_2 o paralelă la tangenta comună $\overline{NM} = l$; se formează triunghiul dreptunghic O_1LO_2 cu laturile : $\overline{O_1O_2} = a$, $\overline{O_1L} = \frac{x}{2} - \left(a - \frac{x}{2}\right) = x - a$ și $\overline{O_2L} = \overline{NM} = l$.

Aplicînd teorema lui Pitagora avem ecuația care ne dă x :

$$(x - a)^2 = a^2 - l^2,$$

de unde rezultă $x = a \pm \sqrt{a^2 - l^2}$.

Cele două soluții corespund cazului din figură și cazului cînd cercul cel mic este trasat trecînd prin A, iar cel mare prin B.

2) Problema este posibilă numai dacă $a^2 - l^2 \geqslant 0$. Valoarea maximă pentru l reiese din inegalitatea precedentă, ea este egală cu a.

238. 1) Patrulaterul $OMNB$ (fig. 123) are două unghiuri opuse de cîte 90° ($\widehat{MOB} = \widehat{MNB} = 90°$) deci el este inscriptibil. Aplicînd proprietatea puterii unui punct față de cercul ce trece prin M, N, B, O avem:

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AO} \cdot \overline{AB} = 2R^2,$$

(R este raza cercului) ceea ce trebuia demonstrat.

2) Triunghiurile MPN și MAQ(Q este al doilea punct unde perpendiculara în M pe CD taie cercul) sînt asemenea,

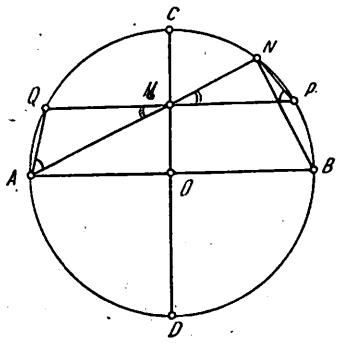


Fig. 123

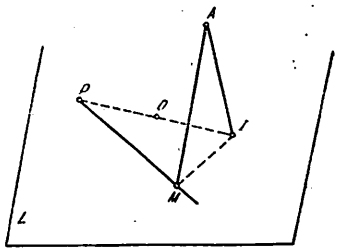


Fig. 124

avînd unghiurile din A și P egale cu jumătatea măsurii arcului QN și unghiurile din M opuse la vîrf.

Rezultă:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MN}} \text{ sau : } \overline{MA} \cdot \overline{MN} = \overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MP}^2.$$

3) Din relația stabilită, reiese că $\overline{MA} \cdot \overline{MN}$ este maxim atunci cînd $\overline{MP}$ este maxim. Aceasta se întîmplă cînd coarda QP devine diametru, adică atunci coarda AN devine și ea un diametru.

239. Să considerăm M proiecția punctului fix A pe una din dreptele ce trec prin celălalt punct fix P din planul dat (fig. 124).

Ducem din A perpendiculara pe plan și care taie planul în punctul fix I. Pe baza teoremei celor trei perpendiculare,

dreapta IM este perpendiculară pe MP. Triunghiul PMI este aşadar dreptunghic. Distanţa de la M la mijlocul O al ipotenuzei $\overline{PI}$ este egală, după cum se ştie, cu $\frac{\overline{PI}}{2}$. Rezultă de aci că punctele M rămîn mereu la aceeaşi distanţă de mijlocul O al laturii fixe PI. Locul lui M este deci un cerc aşezat în planul P cu centrul în O şi raza $\frac{\overline{PI}}{2}$.

240. Să presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul căutat, avînd înălţimea $\overline{AD}$, bisectoarea $\overline{AE}$ şi mediana

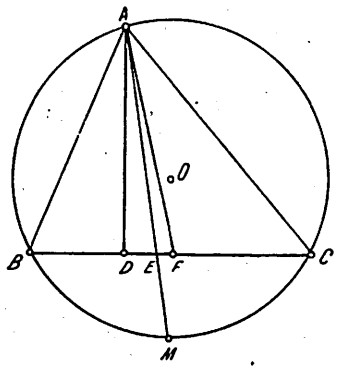


Fig. 125

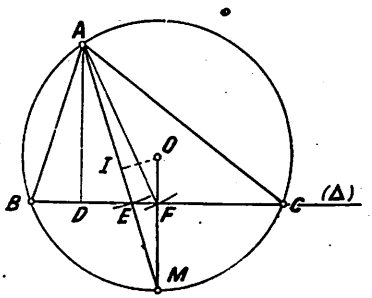


Fig. 126

$\overline{AF}$ date (fig. 125). Construim cercul circumscris triunghiului ABC cu centrul O.

Bisectoarea $\overline{AE}$ prelungită retaie cercul în M, mijlocul arcului BMC. Tot prin M trece şi mediatoarea segmentului $\overline{BC}$. Centrul cercului fiind egal depărtat de A şi M, este situat pe mediatoarea segmentului $\overline{AM}$. Aceste constatări ne conduc la rezolvarea problemei de construcţie.

Dintr-un punct D de pe o dreaptă arbitrară Δ, ridicăm o perpendiculară $\overline{DA}$ egală cu înălţimea dată. Din A ca centru şi cu o rază cît bisectoarea ducem un arc care taie Δ în E, tot din A cu o rază cît mediana dată trasăm un arc care taie Δ în F. În F pe Δ construim o perpendiculară (fig. 126),

care taie prelungirea dreptei AE în M. În I, mijlocul distanței $\overline{AM}$, ridicăm o perpendiculară care întîlnește prelungirea lui $\overline{MF}$ în O. Din O ca centru și cu raza $\overline{OA}$ descriem un cerc care taie pe Δ în punctele B și C celelalte două vîrfuri ale triunghiului. Condiția de posibilitate a problemei este ca $\overline{AD} < \overline{AE} < \overline{AF}$.

241. Considerăm două cazuri.

1) Punctele M' și N' sînt situate de o parte și de alta a diametrului (fig. 127). Ducem perpendiculara OL din centrul

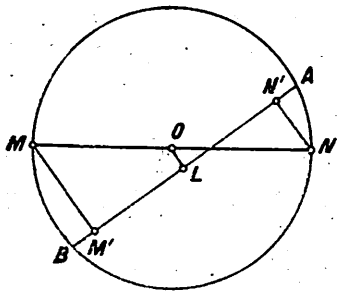


Fig. 127

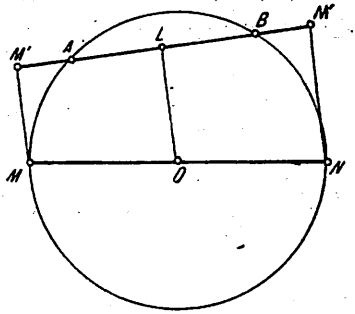


Fig. 128

cercului pe coarda AB. În trapezul $MM'NN'$, punctul O este mijlocul diagonalei $\overline{MN}$, urmează că OL care e paralelă cu bazele MM', NN' trece prin mijlocul celeilalte diagonale. Avem deci :

$$\overline{M'L} = \overline{LN'} \qquad \text{și} \qquad \overline{BL} = \overline{LA},$$

rezultă :

$$\overline{M'L} + \overline{LA} = \overline{BL} + \overline{LN'},$$

sau :

$$\overline{M'A} = \overline{N'B}.$$

2) Punctele M' și N' sînt situate de aceeași parte a diametrului MN (fig. 128). Perpendiculara dusă din centrul cercului pe coarda $\overline{AB}$ împarte coarda și pe $\overline{M'N'}$ în părți egale.

Avem deci:

$$\overline{AL} = \overline{LB} \qquad \text{şi} \quad \overline{M'L} = \overline{LN'}$$

şi prin urmare:

$$\overline{M'L} - \overline{AL} = \overline{LN'} - \overline{LB},$$

sau:

$$\overline{M'A} = \overline{BN'}.$$

242. Fie patrulaterul $ABCD$ şi cercul O tangent prelungirilor laturilor în M, N, P, Q (fig. 129). Avînd în vedere că

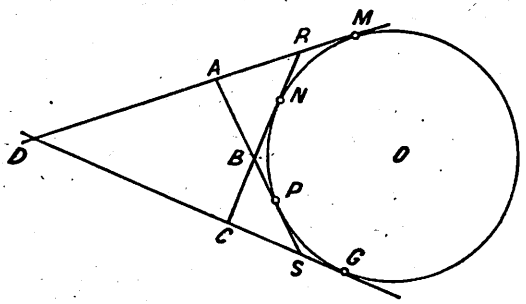


Fig. 129

tangentele duse din acelaşi punct la un cerc sînt egale, avem:

$$\overline{DQ} = \overline{DM};\ \overline{CN} = \overline{CQ};\ \overline{SP} = \overline{SQ} \text{ etc } \ldots.$$

Să calculăm acum diferenţa laturilor opuse. Avem:

$$\overline{DC} - \overline{AB} = (\overline{DQ} - \overline{CQ}) - (\overline{AP} - \overline{BP}) = \overline{DQ} - \overline{CQ} + \\ + \overline{BP} - \overline{AP}$$

şi:

$$\overline{DA} - \overline{CB} = (\overline{DM} - \overline{AM}) - (\overline{CN} - \overline{BN}) = \overline{DM} - \overline{AM} + \\ + \overline{BN} - \overline{CN}.$$

Pentru că:

$$\overline{DQ} = \overline{DM}, \overline{CQ} = \overline{CN}, \overline{BP} = \overline{BN} \text{ şi } \overline{AP} = \overline{AM}$$

rezultă că :

$$\overline{DC} - \overline{AB} = \overline{DA} - \overline{CB},$$

ceea ce trebuia dovedit.

243. Notînd cu a, b, c, laturile triunghiului, cu p semiperimetrul și cu S aria lui, avem :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S},$$

iar :

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} =$$

$$= \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S}.$$

Rezultă deci, că egalitatea dată este justă.

244. Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 130). Unind A' cu B, C, C', D se formează trei piramide $A'(ABCD)$; $A'(BB'C'C)$ și $A'(DD'C'C)$ care sînt egale, avînd bazele pătrate egale și cîte două fețe alăturate, triunghiuri dreptunghice egale cu o muchie comună perpendiculară pe planul bazei. Astfel, de exemplu, piramidele $A'(ABCD)$ și $A'(DD'C'C)$ coincid prin suprapunere așezînd $\overline{A'D'}$ peste $\overline{A'A}$; $\overline{D'D}$ peste $\overline{AB}$; $\overline{D'C'}$ peste $\overline{AD}$. La fel se arată că $A'(ABCD)$ este egală cu $A'(BB'C'C)$.

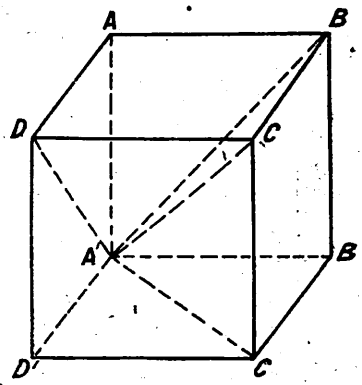


Fig. 130

245. Fie $VA_1A_2 \ldots A_n$ (fig. 131) o piramidă regulată, M un punct oarecare de pe baza piramidei, iar d_1, $d_2 \ldots d_n$ distanțele lui M pînă la fețele laterale VA_1A_2, $VA_2A_3 \ldots VA_n A_1$, a căror arie comună este S.

Unind M cu V, A_1, A_2 ... A_n se formează n piramide a căror sumă a volumelor este evident egală cu volumul întregii piramide. Luăm ca baze ale piramidelor cu vîrful în M tocmai fețele laterale ale piramidei regulate și scriem că suma volumelor este egală cu volumul piramidei $VA_1A_2 \ldots A_n$. Avem deci

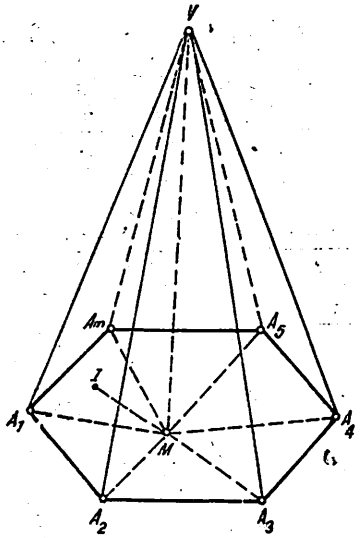


Fig. 131

$$\frac{Sd_1}{3} + \frac{Sd_2}{3} + \ldots + \frac{Sd_n}{3} = \frac{B \cdot h}{3},$$

unde am notat cu B aria bazei piramidei regulate, iar cu h înălțimea piramidei dusă din V.

Rezultă:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n =$$

$$= \frac{B \cdot h}{S} = \text{constant},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru a găsi valoarea constantei, așezăm pe M în centrul poligonului de bază. Toate distanțele d_1, d_2 ... d_n devin în acest caz egale cu distanța de la centrul poligonului pînă la una din fețele laterale, pe care o notăm cu d.

Avem deci:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = nd.$$

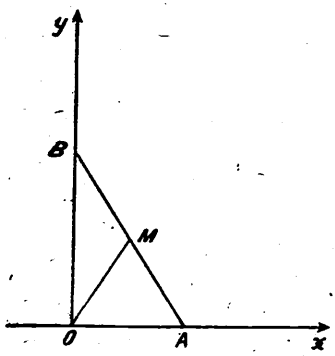


Fig. 132

246. Să considerăm dreptele încrucișate $Ox \perp Oy$ (fig. 132) pe care se sprijină segmentul de lungime constantă $\overline{AB} = l$. Mijlocul M al segmentului $\overline{AB}$ este

centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic OAB; avem deci:

$$\overline{MO} = \overline{MA} = \overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}.$$

Rezultă, prin urmare, că punctul M rămîne la aceeaşi distanţă de O.

Locul lui M este sfertul de cerc cu centrul în O şi raza $\frac{l}{2}$.

Dacă segmentul AB variază şi în celelalte cadrane, locul lui M este întreg cercul cu centrul O şi raza $\frac{l}{2}$.

247. După datele problemei reiese că cercul este tangent laturilor egale $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ în punctele B şi C (fig. 133). Din triunghiul dreptunghic AOC, avem:

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DO},$$

sau:

$$\frac{a^2}{4} = h \cdot \overline{DO}.$$

Rezultă:

$$\overline{DO} = \frac{a^2}{4h}.$$

Şi prin urmare:

$$R^2 = \overline{OD} \cdot (\overline{OD} + \overline{DA}) =$$

$$= \frac{a^2}{4h}\left(\frac{a^2}{4h} + h\right),$$

sau:

$$R = \frac{a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{4h}.$$

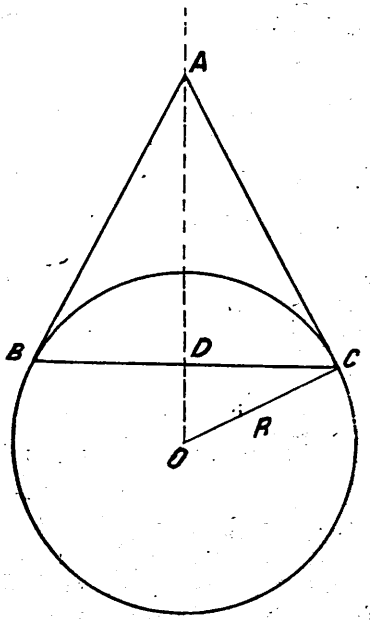


Fig. 133

248. Aria S a triunghiului ABC (fig. 134) este dată de formula:

$$2S = \overline{AB} \cdot \overline{AC}. \qquad (1)$$

Dacă notăm cu D, E, F punctele de contact ale cercului O înscris în triunghi și înlocuim în (1) laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ prin $\overline{AF} + \overline{FB}$ și $\overline{AE} + \overline{EC}$, avem:

$$2S = \overline{AF} \cdot \overline{AE} + \overline{AF} \cdot \overline{EC} + \overline{FB} \cdot \overline{AE} + \overline{FB} \cdot \overline{EC}. \qquad (2)$$

Ținînd seama că $\overline{AF} \cdot \overline{AE}$ = aria pătratului $AEOF$; $\overline{AF} \cdot \overline{EC} = \overline{EO} \cdot \overline{EC} \cdot = 2$ aria triunghiului EOC = aria patrulaterului $EODC$; $\overline{FB} \cdot \overline{AE} = \overline{FB} \cdot \overline{FO} = 2$ aria triunghiului FOB = aria patrulaterului $FODB$; că $\overline{FB} = \overline{DB}$ și $\overline{EC} = \overline{DC}$ ca tangente duse din același punct la un cerc, atunci (2) devine:

$$2S = S + \overline{DB} \cdot \overline{DC}.$$

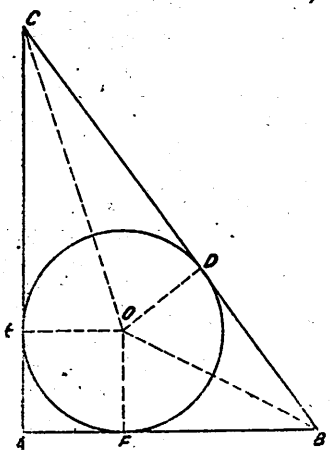


Fig. 134

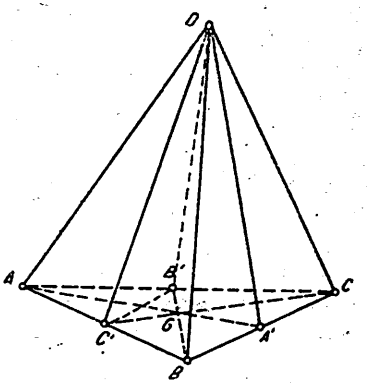


Fig. 135

Din această relație rezultă:

$$S = \overline{DB} \cdot \overline{DC},$$

ceea ce trebuia dovedit.

249. Purtăm pe cele trei muchii ale unghiului triedru, începînd de la vîrful O, trei segmente egale $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ (fig. 135). Din cauză că triunghiurile OBC, OCA și OAB sînt isoscele, bisectoarele fețelor respective OA', OB', OC' trec prin

mijloacele laturilor A', B', C' ale triunghiului ABC. Se știe că dreptele AA', BB', CC' fiind mediane, se întîlnesc în același punct G. Astfel încît planele OAA', OBB', OCC' care trec prin muchiile unghiului triedru și bisectoarele fețelor opuse au două puncte comune diferite pe O și pe G, deci au o dreaptă comună pe OG, ceea ce demonstrează teorema.

250. Se pune problema de a se construi un tetraedru $ABCD$ (fig. 136) cu muchiile date.

Dacă așezăm în același plan, fețele CAD și CBD și rotim apoi fața CAD în jurul muchiei CD pînă ce distanța $\overline{AB}$ devine 8 cm, atunci realizăm tetraedrul dat.

Cînd fața CAD se rotește în jurul muchiei CD, distanța dintre punctele A și B se mărește. Este deci necesar și suficient ca distanța punctelor A, B în poziția tetraedrului format să fie mai mare decît distanța $\overline{AB}$ din poziția cînd CAD este în același plan cu CBD ca în figura 137.

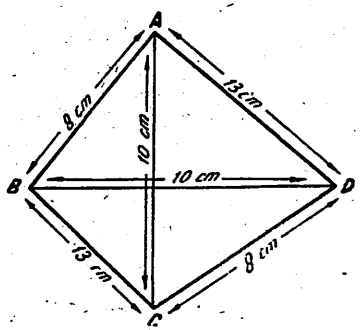


Fig. 136

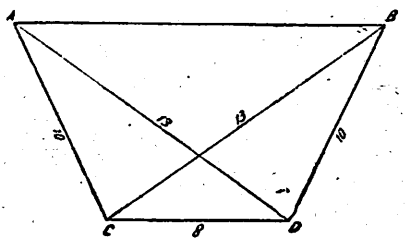


Fig. 137

Să calculăm această distanță. Patrulaterul $ACDB$, avînd $\overline{AC} = \overline{BD} = 10$ și $\overline{AD} = \overline{BC} = 13$, este un trapez isoscel. Aplicăm formula care leagă laturile și diagonalele unui patrulater inscriptibil, după care obținem:

$$8 \cdot \overline{AB} + 10 \cdot 10 = 13 \cdot 13.$$

Rezultă deci:

$$AB = \frac{13^2 - 10^2}{8} = \frac{69}{8} = 8{,}625 \text{ cm},$$

care este mai mare decît muchia tetraedrului de 8 cm. Aşa dar nu există puncte în spaţiu altfel ca $\overline{AB} = \overline{CD} = 8, \overline{AC} = \overline{BD} = 10$ şi $\overline{AD} = \overline{BC} = 13$.

251. 1) Demonstrăm că figura $APBF$ este un paralelogram (fig. 138). Dreptele AP şi FB sînt paralele, ele fiind perpendiculare pe raza punctului A. Dreapta PB este bisectoarea unghiului tangentelor în A şi C; de aceea ea se confundă cu diametrul BE cu care coarda AF este paralelă pentru că arcele AB şi FE sînt egale.

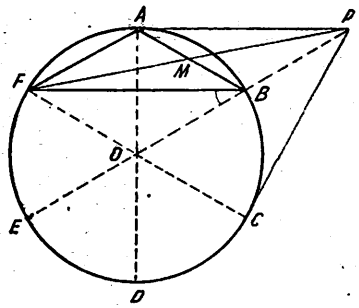


Fig. 138

Aşadar, patrulaterul $APBF$ are laturi opuse paralele două cîte două, deci el este paralelogram. Rezultă că PF trece prin mijlocul M al segmentului $\overline{AB}$.

2) Din acelaşi paralelogram rezultă că $\overline{PF} = 2 \cdot FM$.

Aplicăm teorema medianei în triunghiul AFB, de unde rezultă:

$$\overline{FM}^2 = \frac{\overline{AF}^2 + \overline{FB}^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

Avînd în vedere că $\overline{AF} = \overline{AB} = R$ şi $\overline{FB} = R\sqrt{3}$, rezultă:

$$\overline{FM} = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

şi deci:

$$\overline{PF} = 2 \cdot \overline{FM} = R\sqrt{7},$$

ceea ce trebuia dovedit.

252. Cercul cu centrul în A şi raza $\frac{a}{2}$ (fig. 139) trece prin punctele de contact E şi F ale cercului înscris cu laturile AB şi AC.

Aria de calculat este formată din aria segmentului de cerc ENF aparţinînd cercului înscris şi aria segmentului de cerc EMF care aparţine cercului cu raza $\frac{a}{2}$.

Aria ENF este o treime din diferenţa ariilor cercului înscris şi a triunghiului echilateral cu latura EF, adică,

$$\text{aria } ENF = \frac{1}{3}\left[\pi \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\right].$$

Aria EMF este o şesime din diferenţa ariilor cercului cu centrul A şi raza $\frac{a}{2}$ şi a exagonului regulat înscris, adică:

$$\text{aria } EMF = \frac{1}{6}\left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3\,a^2\sqrt{3}}{8}\right].$$

Aria cuprinsă între cele două cercuri are valoarea:

$$A = \frac{a^2}{3}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right) + \frac{a^2}{24}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2(5\pi - 6\sqrt{3})}{72} \approx 0{,}073\,a^2.$$

253. Triunghiurile ABA_1, BCB_1, CAC_1 (fig. 140) sînt egale. Notăm cu S aria lor comună. De asemeni sînt egale şi

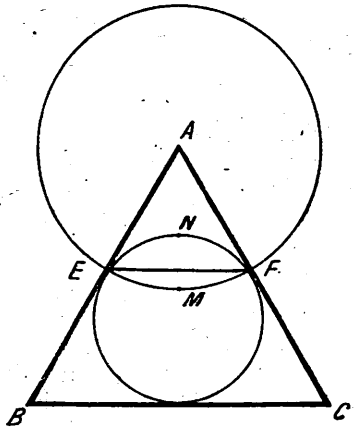


Fig. 139

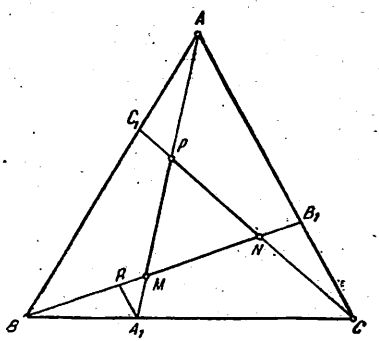


Fig. 140

triunghiurile BA_1M, CB_1N şi AC_1P a căror arie comună o însemnăm cu a.

Dacă T este aria triunghiului echilateral ABC şi t aria căutată a triunghiului MNP, avem:

$$t = T - 3S + 3a.$$

Deoarece $3S$ este egală tocmai cu aria triunghiului echilateral, rezultă că:

$$t = 3a.$$

Să evaluăm a.

Avem: $\frac{\text{aria } A_1BM}{\text{aria } A_1BA} = \frac{a}{S} = \frac{3a}{T} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{AA_1}}$.

Deducem:

$$t = 3a = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{AA_1}} \cdot T.$$

Pentru a calcula raportul $\frac{\overline{MA_1}}{\overline{AA_1}}$, ducem $A_1R \parallel CA$.

Avem:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{RA_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{RA_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

şi prin urmare:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{AM} + \overline{MA_1}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{1}{6+1} = \frac{1}{7}.$$

Rezultă:

$$t = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{AA_1}} \cdot T = \frac{1}{7} \cdot T,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

254. Fie o secţiune patrulateră $MNPQ$ în tetraedrul regulat $ABCD$ (fig. 141) care trebuie să fie un pătrat. Să examinăm care este poziţia punctelor M, N, P, Q pe muchiile respective.

Planul patrulaterului trebuie să fie paralel cu muchiile BD şi AC pentru că altminteri MN şi QP s-ar intersecta pe muchia BD, iar NP şi MQ pe AC, ceea ce este absurd.

Urmează că $MN \parallel QP \parallel BD$ şi $MQ \parallel NP \parallel AC$, iar triunghiurile NDP şi ANM sînt echilaterale. Rezultă $\overline{NP} = \overline{ND}$, $\overline{MN} = \overline{AN}$ şi prin urmare $\overline{AN} = \overline{ND}$ fiindcă $\overline{NP} = \overline{MN}$; deoarece $MNPQ$ este presupus pătrat. Deducem că N este mijlocul muchiei AD. La fel se arată că M, Q, P se află în

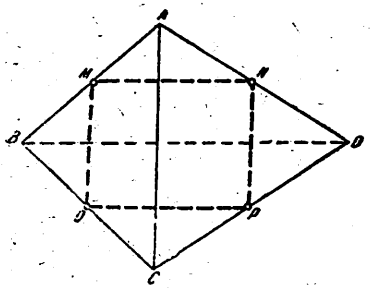


Fig. 141

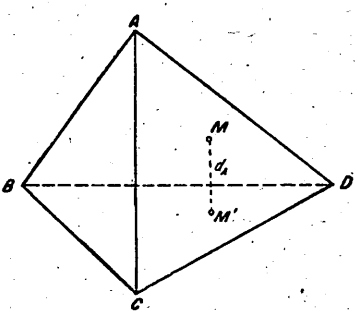


Fig. 142

mijlocul muchiilor respective. Aşadar, o secţiune patrulateră cu laturi egale are vîrfurile în mijlocul muchiilor BA, BC, DA şi DC. Această secţiune este pătrat pentru că diagonalele $\overline{MP}$ şi $\overline{NQ}$ sînt egale :

Aria secţiunii este :

$$S = \overline{MN}^2 = \frac{a^2}{4}.$$

255. Unitatea de volum fiind cubul a cărui latură este unitatea de lungime, se stabilesc pe rînd volumele poliedrelor următoarele :

1) Volumul paralelipipiedului dreptunghic.
2) Volumul paralelipipedului drept.
3) Volumul paralelipipedului.
4) Volumul prismei triunghiulare.
5) Volumul piramidei triunghiulare.
6) Volumul piramidei.

256. Notăm cu d_A, d_B, d_C, d_D distanţele unui punct M interior pînă la feţele opuse vîrfurilor A, B, C, D ale tetraedrului (fig. 142).

Scriem că suma volumelor tetraedrelor : $MBCD$; $MACD$; $MABD$, $MABC$ este egală cu volumul tetraedrului cu aria feței S și înălțimea h.

$$\frac{Sd_A}{3} + \frac{Sd_B}{3} + \frac{Sd_C}{3} + \frac{Sd_D}{3} = \frac{Sh}{3}$$

de unde rezultă : $d_A + d_B + d_C + d_D = h$.

257. Să considerăm K mijlocul unui segment variabil AB cu extremitățile pe X, Y și care este paralel cu segmentul $\overline{MN}$ (fig. 143). Dreptele AB și MN fiind paralele formează un plan care intersectează X după dreapta AM și Y după BN, iar aceste drepte se întretaie într-un punct L de pe intersecția planelor X și Y. Punctul K se află pe mediana LI a triunghiului MLN. Rezultă deci că locul mijloacelor segmentelor AB este un plan care trece prin dreapta de intersecție X, Y, și prin mijlocul I al segmentului dat MN.

258. Presupunem problema rezolvată. Fie X punctul căutat (fig. 144). Ducem din A un segment $\overline{AD} = a$ și paralel cu $\overline{MN} = a$. Figura $ADMN$ este un paralelogram. Deoarece DN este paralelă cu AM, rezultă că unghiurile DNB și AXB sînt

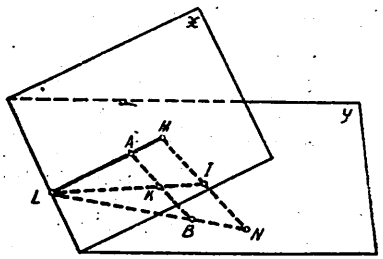


Fig. 143

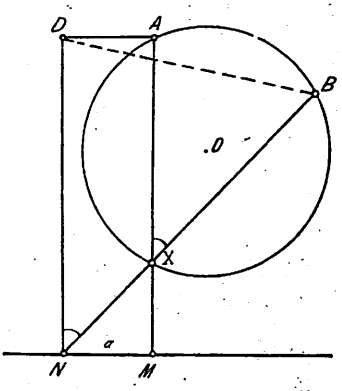


Fig. 144

egale. Urmează că din punctul N se vede segmentul DB sub unghiul constant AXB.

Din aceste observații, deducem următoarea construcție. Din A se duce segmentul $\overline{AD} = a$ paralel cu dreapta dată MN. Pe segmentul $\overline{DB}$ descriem un arc capabil de unghiul

înscris în cercul dat avînd ca măsură arcul AB. Acest arc capabil determină pe dreapta dată două puncte N, unul sau niciunul. Unind N cu B, obținem la intersecția cu cercul dat punctul X. După cum s-a văzut mai sus, problema comportă discuții. Propunem ca cititorul să examineze cazurile ce se pot ivi.

259. Aflăm în primul rînd locul mijloacelor segmentelor care unesc extremitățile segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ cu fiecare punct de pe celălalt segment (fig. 145). Astfel unind A cu fiecare punct P de pe segmentul $\overline{CD}$, locul mijloacelor M al segmentelor $\overline{AP}$ este o paralelă EF la CD care este limitată de dreptele AC și AD. La fel se găsesc locurile mijloacelor segmentelor care unesc D cu fiecare punct de pe $\overline{AB}$, apoi B cu fiecare punct de pe CD și C cu fiecare punct de pe AB: ele sînt respectiv segmentele FG, GH și HE. Unind apoi un punct N situat între A și B cu un punct Q de pe CD, mijlocul S al acestui segment este situat între paralelele EF și CD după cum ușor se poate demonstra aceasta. Rezultă din această analiză că locul căutat este format din punctele din interiorul paralelogramului $NHGF$ cît și din cele de pe conturul acestui paralelogram.

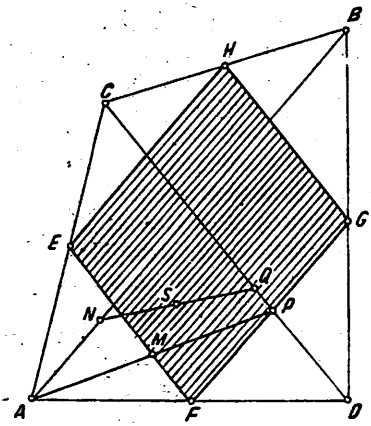


Fig. 145

Că fiecare punct din interiorul paralelogramului este un punct al locului se poate vedea și din faptul că, fiind dat un punct M (fig. 146) se poate găsi segmentul NQ al cărui mijloc este M. Prelungim $\overline{OM}$ cu segmentul egal $\overline{MP}$. Din P se duc paralelele PQ și PN la segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{DC}$. Segmentul $\overline{NQ}$ are ca mijloc pe M.

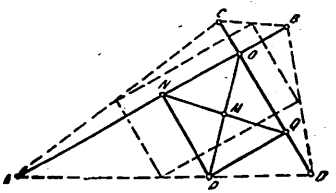


Fig. 146

260. Centrul O al dreptunghiului $EFGH$ cu vîrfurile aşezate pe laturile triunghiului ABC (fig. 147) este mijlocul segmentului $\overline{RS}$ care uneşte mijloacele laturilor $\overline{EH}$ şi $\overline{FG}$.

Mijloacele R şi S ale segmentelor $\overline{HE}$ şi $\overline{GF}$ paralele cu înălţimea AD se află aşezate pe medianele din B şi C ale

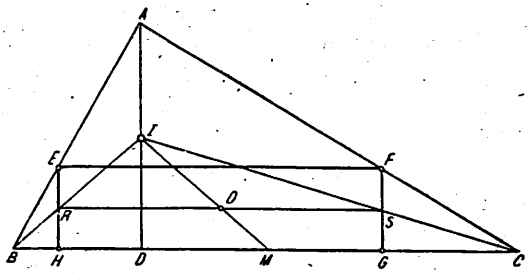


Fig. 147

triunghiurilor ABD şi ACD. Aceste mediane se întîlnesc în mijlocul I al înălţimii ID. Aşa fiind, se vede că centrele dreptunghiurilor $EFBH$ sînt mijloacele segmentelor paralele cu BC din triunghiul IBC, deci locul lor este mediana IM a triunghiului IBC.

Centrele dreptunghiurilor cu o latură aşezată pe AC şi celelalte vîrfuri pe AB şi CB se află pe dreapta care uneşte mijlocul înălţimii din B cu mijlocul laturii AC, iar a acelor care au o latură pe AB sînt situate pe dreapta care uneşte mijlocul laturii AB cu mijlocul înălţimii din C. Se poate demonstra că cele trei drepte sînt concurente în acelaşi punct.

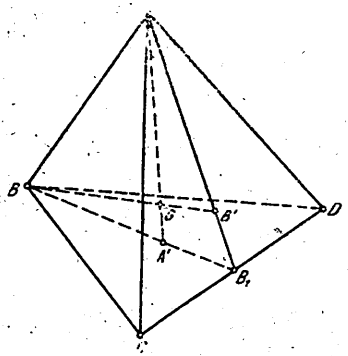


Fig. 148

261. Se ştie că dreptele care unesc vîrfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale feţelor opuse sînt concurente în acelaşi punct G astfel că:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GB'}} = \frac{\overline{GG}}{\overline{GC'}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GD'}} = 3,$$

unde A', B', C', D' sînt centrele de greutate ale feţelor opuse vîrfurilor A, B, C, D (fig. 148).

Dacă prelungim BG cu GB_1, CG cu GC_1 şi DG cu GD_1 astfel ca:

$$\frac{\overline{B_1G}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{C_1G}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{D_1G}}{\overline{GD}} = 3,$$

obţinem punctele B_1, C_1, D_1 aşezate pe planul paralel cu BCD dus prin A, pentru că avem şi $\frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} = 3$. Dacă prelungim şi AG cu $\overline{GA_1}$ astfel ca $\overline{A_1G} = 3 \cdot \overline{GA}$, tetraedrul obţinut $A_1B_1C_1D_1$ este tocmai acela format din planele paralele duse prin A, B, C, D paralele cu feţele opuse. După modul de obţinere a acestui tetraedru, aşa cum s-a arătat mai sus, el este asemenea şi omotetic cu $ABCD$, rezultă deci că:

$$\frac{\text{vol } (A_1B_1C_1D_1)}{\text{vol } (ABCD)} = \left(\frac{3}{1}\right)^3 = 27.$$

Ştiind că volumul tetraedrului $ABCD$ a fost notat cu v, avem deci:

$$\text{vol } (A_1B_1C_1D_1) = 27 \text{ v}.$$

262. Notăm cu r_1, r_2 razele trunchiului, cu R raza sferei, cu a şi A ariile totale ale sferei şi a trunchiului, iar cu v şi V volumele sferei şi a trunchiului. În figura alăturată (fig. 149) s-a desenat o secţiune axială printr-un plan dus prin axa trunchiului de con. Generatoarea trunchiului BC este egală cu r_1+r_2 pentru că tangentele duse din B şi C la cercul de secţiune sînt egale ($\overline{CF} = \overline{CT} = r_1$, $\overline{BE} = \overline{BT} = r_2$). Avem:

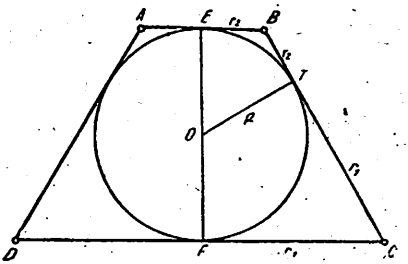


Fig. 149

$$\frac{a}{A} = \frac{4\pi R^2}{\pi \overline{BC}(\overline{EB} + \overline{FC}) + \pi \cdot \overline{EB}^2 + \pi \cdot \overline{FC}^2} = \frac{4\pi R^2}{\pi (r_1 + r_2)^2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2} =$$

$$= \frac{2R^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

şi :

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{\pi \cdot 2R}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)} = \frac{2R^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2},$$

ceea ce demonstrează teorema.

263. Fie $AC'D'$ proiecţia tetraedrului $ABCD$ pe planul P perpendicular pe muchia $\overline{AB} = d$ (fig. 150). Dreptele DD' şi CC' fiind proiectantele punctelor D şi C sînt paralele cu BA şi perpendiculare pe planul P. Tetraedrele $D\ (ABC)$ şi $D'\ (ABC)$ sînt echivalente, avînd aceeaşi bază ABC şi vîrfurile D şi D' la aceeaşi distanţă de ABC pentru că DD' este paralelă la planul ABC ($DD' \parallel AB$). De asemeni, tetraedrele $C(ABD')$ şi $C'\ (ABD')$ sînt echivalente pentru că au aceeaşi bază ABD' şi vîrfurile C şi C' la aceeaşi distanţă de planul ABD' deoarece $CC' \parallel AB$.

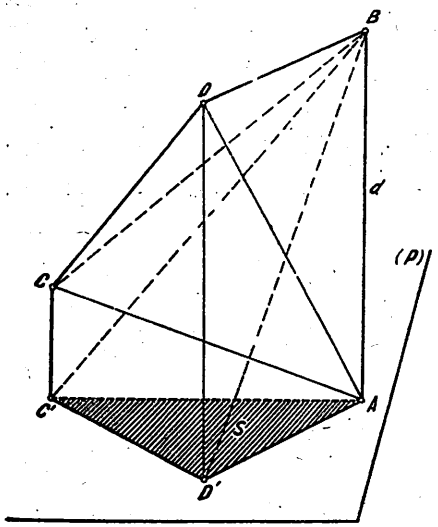


Fig. 150

Rezultă :

$$\text{Vol } A\ (BCD) =$$
$$= \text{vol } D'\ (ABC) =$$
$$= \text{vol } C'\ (ABD) =$$
$$= \text{vol } B\ (C'D'A)$$

şi cum : $$\text{vol } (BC'D'A) = \frac{1}{3}(\text{aria } C'D'A) \cdot \overline{AB},$$

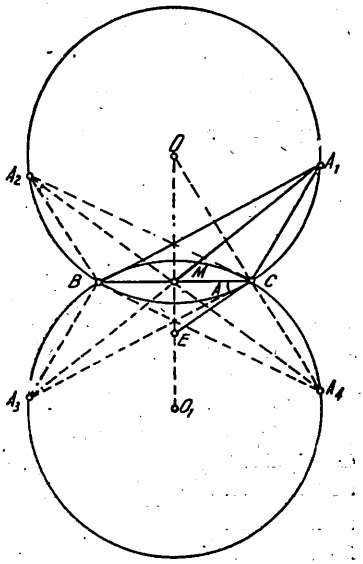
avem : $$\text{vol } A\ (BCD) = \frac{1}{3} \cdot Sd.$$

264. Să presupunem problema rezolvată şi să examinăm figura în lumina datelor din problemă.

Sînt cunoscute $\overline{BC} = a$, unghiul opus A şi distanţa de la mijlocul M al segmentului $\overline{BC}$ pînă la vîrful A (fig. 151 a).

Rezultă de aci că A este situat pe arcul capabil de unghiul dat şi totodată pe cercul cu centrul în M şi cu raza $\overline{AM} = m_a$.

Construcţia este deci următoarea : în C (fig. 151) se construieşte unghiul $\widehat{BCE} = A$, se ridică din mijlocul M al lui $\overline{BC}$ o perpendiculară care intersectează perpendiculara în C pe CE în punctul O. Din O ca centru cu raza OC descriem arcul capabil de unghiul A. Se duce şi arcul BA_3C simetric faţă de BC. Din M ca centru şi cu raza $\overline{MA_1} = m_a$, descriem un cerc care taie în general cele două



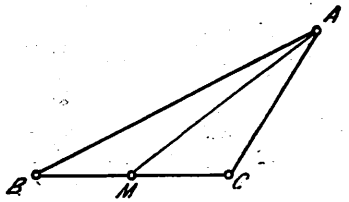


Fig. 151

arce capabile în patru puncte A_1, A_2, A_3, A_4. Se obţin patru triunghiuri egale A_1BC, A_2BC, A_3BC, A_4BC.

Problema poate avea patru soluţii egale, două soluţii sau niciuna.

265. Ca un plan să determine în secţiune un paralelogram, este necesar în primul rînd ca acesta să nu intersecteze decît patru din cele şase muchii ale tetraedrului $ABCD$ (fig. 152). De aceea vom duce un plan paralel cu două muchii opuse ale tetraedrului. Planul nu poate fi dus paralel cu două muchii ce pleacă din acelaşi vîrf pentru că în acest caz obţinem un triunghi.

Aşadar, vom duce dintr-un punct M de pe una din muchii, de exemplu BC, un plan paralel cu CD şi AB. Acesta se obţine

ducînd din M o paralelă MN la CD și una MQ la AB. Se formează patrulaterul $MNPQ$, care este un paralelogram. Într-adevăr, QP este paralelă cu CD, pentru că dacă n-ar fi paralele, ele fiind în același plan s-ar întîlni, ceea ce este imposibil, pentru că planul NMQ este paralel cu CD. La fel se vede că $NP \parallel AB$. Rezultă deci $MN \parallel PQ$ și $MQ \parallel NP$; prin urmare $MNPQ$ este un paralelogram.

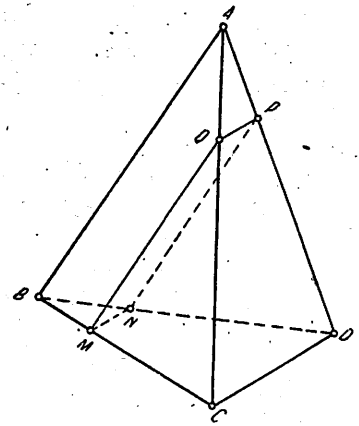


Fig. 152

Observare. Punctul M poate fi luat pe orice muchie a tetraedrului.

266. Ca să dăm un răspuns acestei probleme, avem nevoie de raza sferei și apoi de volumul ei, după care vom scădea din volumul sferei pe acel al celor șase segmente sferice care sînt situate în exteriorul cubului (fig. 153).

Se observă că centrul sferei e în centrul cubului, iar unul din punctele sferei este mijlocul M al unei muchii (locul unde sfera atinge muchia $\overline{BC}$). Așa fiind, rezultă că raza sferei este jumătate din diagonala pătratului care trece prin mijloacele muchiilor paralele $BC \parallel B'C' \parallel A'D' \parallel AD$, adică jumătate din diagonala pătratului cu latura a. Rezultă că raza sferei este:

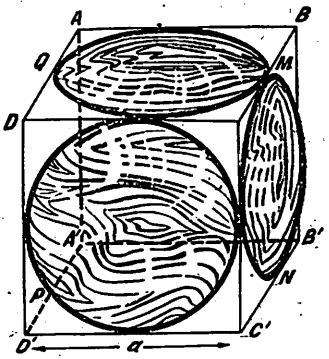


Fig. 153

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

și deci volumul sferei este:

$$V = \frac{\pi \sqrt{2} \cdot a^3}{3}.$$

Pentru a calcula volumul segmentelor sferice, să calculăm numai volumul unuia din ele. În figura 154 este redată sec-

ţiunea în sferă şi cub prin planul dus prin $MNPQ$. Se observă că înălţimea h a calotei este:

$$h = R - OI = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Aplicînd formula pentru volumul v a unui segment sferic limitat de calotă:

$$v = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

găsim:

$$v = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4} \cdot \left(\frac{3a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2}\right) = \frac{\pi a^3}{24}(4\sqrt{2} - 5)$$

şi deci volumul sferei din interiorul cubului este:

$$V_1 = \frac{\pi\sqrt{2}\,a^3}{3} - 6 \cdot \frac{\pi \cdot a^3}{24}(4\sqrt{2} - 5) = \frac{\pi a^3}{12}(15 - 8\sqrt{2}).$$

267. Triunghiul nu poate avea $\overline{AB} = \overline{AC}$, pentru că în acest caz înălţimea, mediana şi bisectoarea din A s-ar confunda.

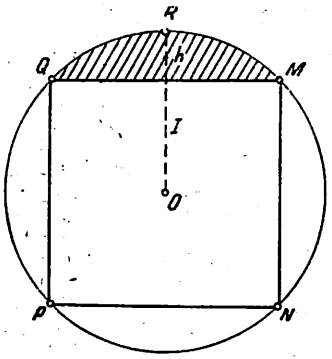


Fig. 154

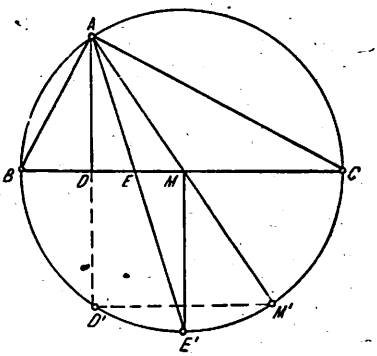


Fig. 155

Rezultă deci că din cele două laturi $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, una este mai mică. Să presupunem $\overline{AB} < \overline{AC}$. În acest caz ordinea de succesiune a celor trei ceviene este: înălţimea, bisectoarea apoi mediana. Să considerăm cercul, de centru O circumscris triunghiului ABC şi D', E', M' punctele unde înălţimea, bisectoarea şi mediana retaie cercul (fig. 155). Din cauză că avem

$\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$ rezultă că arcele BD' şi $M'C$ sînt egale ; prin urmare $D'M'$ este paralelă cu BC şi în consecinţă triunghiul $AD'M'$ este dreptunghic în D' (pentru că $AD \perp BC$). Urmează că mediana AM' este un diametru al cercului, iar centrul O al cercului fiind situat pe mediană, trebuie să se confunde cu mijlocul laturii AB, căci altminteri avînd $\overline{OB} = \overline{OC}$, mediatoarea OM confundîndu-se cu mediana, triunghiul ABC ar fi isoscel (caz exclus de la început). Aşadar, punctul M este centrul cercului, adică şi BC este un diametru, iar triunghiul ABC este dreptunghic. Putem evalua în cazul problemei şi celelalte unghiuri. Dacă notăm cu $u = \widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAM} = \widehat{MAC}$, rezultă că $u = \frac{90^\circ}{4} = 22^\circ 30'$ pentru că avem $\overline{MA} = \overline{MC}$ (M fiind acum centrul cercului) deducem $\widehat{MCA} = \widehat{MAC} = 22^\circ 30'$, iar $\widehat{ABC} = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$.

Observare. Din raţionament rezultă că triunghiul este dreptunghic numai dacă $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$, adică atunci cînd înălţimea şi mediana ce pleacă din acelaşi vîrf sînt drepte isogonale.

Partea a III-a

ALGEBRĂ

268. Dacă un număr are cifrele a (zeci) şi b (unităţi), atunci răsturnatul are cifrele b (zeci) şi a (unităţi).

Suma celor două numere, cu cifrele în ordine inversă, este:

$$10a + b + 10b + a = 10(a + b) + (a + b) = 11(a + b).$$

Avem două posibilităţi:

1) $a + b < 10$; în acest caz $a + b$ este o cifră c care înmulţită cu 11 dă un număr cu două cifre egale.

De unde rezultă că

$$ab + ba = cc \qquad (c = a + b)$$

2) $a + b > 10$; în acest caz $a + b$ este un număr de două cifre dintre care prima de la stînga este 1, adică $a + b = 1c$. (c este cel mult 8).

Înmulţind $1c$ cu 11, obţinem:

$$\begin{array}{r} 1c \times \\ 11 \\ \hline 1c \\ 1c \\ \hline 1c+1\ c \end{array}$$

Se vede că rezultatul este un număr de trei cifre $1, c + 1, c$, în care cifra de mijloc $c + 1$ este suma cifrelor extreme 1 şi c.

269. Adunînd egalităţile, membru cu membru, obţinem:

$$\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} = \frac{a + b + c}{2}. \qquad (1)$$

Scăzînd din (1) pe rînd, membru cu membru, fiecare din ecuaţiile sistemului dat, deducem sistemul echivalent :

$$\frac{yz}{x} = \frac{b+c-a}{2},$$

$$\frac{xz}{y} = \frac{a+c-b}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{xy}{z} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Înmulţind egalităţile (2), membru cu membru, obţinem :

$$xyz = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{8}. \tag{3}$$

Împărţind acum pe rînd, membru cu membru, egalitatea (3) la fiecare din ecuaţiile (2), aflăm :

$$x^2 = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4};\ y^2 = \frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4}$$

şi

$$z^2 = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4}.$$

Şi în sfîrşit :

$$x = \frac{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}}{2};\ y = \frac{\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}}{2};$$

$$z = \frac{\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}}{2}.$$

270. Amplificînd fracţia cu a^{m+1}, obţinem :

$$F = \frac{a^{m+1}(a+a^2+\ldots+a^m)}{a^{m+1}(a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-m})} = \frac{a^{m+1}(a+a^2+\ldots+a^m)}{a^m+a^{m-1}+\ldots+a}.$$

De unde rezultă, $F = a^{m+1}$.

271. Să notăm cu x vîrsta persoanei întîia şi cu y vîrsta persoanei a doua. Sistemul de ecuaţii care rezolvă problema este :

$$x = 2\,[y - (x - y)],$$

$$x + y = 63,$$

cu soluţia : $x = 36$; $y = 27$.

272. Notăm cu d diametrul roţii mici şi cu D diametrul roţii mari.

Circumferinţa roţii mici este deci πd şi a roţii mari : $\pi D = \pi d + 47{,}1$.

Deoarece, în acelaşi timp, cele două roţi parcurg spaţii egale, circumferinţele lor sînt invers proporţionale cu numărul de turaţii, adică :

$$\frac{\pi d}{\pi d + 47{,}1} = \frac{120}{210}.$$

Rezultă de aci că : $d = 20$ cm.

Circumferinţa roţii mari este deci : $\pi D = 20\,\pi + 47{,}1$ şi $D = 35$ cm.

273. Avem : $E_5 - E_4 = x_5 = 1$, pe care îl înlocuim în ecuaţia

$$E_4 - E_3 = x_4 + 2x_5 = 1 \text{ şi aflăm :}$$

$$x_4 = -1.$$

Din $E_3 - E_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$ şi valorile găsite anterior pentru x_4 şi x_5 obţinem $x_3 = 1$.

Ecuaţiile $E_3 - E_2 = 1$ şi $E_1 = 1$ ne dau respectiv :

$$x_2 = -1 \quad \text{şi} \quad x_1 = 1.$$

Astfel soluţia sistemului este :

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$ şi $x_5 = 1$.

274. Deoarece notele de la lucrările scrise diferă între ele cu un punct, notînd cu x nota la matematică, rezultă că la limba romînă elevul a obţinut $(x + 1)$ sau $(x - 1)$. Să considerăm prima ipoteză.

La oral elevul a obţinut la matematică cu un punct mai mult decît la scris, deci $(x + 1)$, iar la limba romînă cu un punct mai puţin decît la scris, deci (x).

Media notelor de la lucrările scrise este astfel:

$\frac{x+(x+1)}{2} = \frac{2x+1}{2}$, iar media celor de la oral este:

$$\frac{(x+1)+x+3}{3} = \frac{2x+4}{3}.$$

Știind că media generală este 4,25 obținem ecuația: $\left(\frac{2x+1}{2} + \frac{2x+4}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = 4{,}25$. Rezolvînd această ecuație, obținem $x = 4$, deci elevul a obținut la matematică: 4 la scris și 5 la oral.

A doua ipoteză duce la un rezultat imposibil (se obțin notele 5 și 6) și deci nu poate fi luată în considerație.

275. Notăm cu x numărul de ha, ce trebuie lucrate de fiecare tractorist și cu y numărul zilelor în care trebuia terminată lucrarea. Scriind că prin depășirea normei zilnice cu 2 ha numărul zilelor necesare lucrării se micșorează cu 1, formăm ecuația: $\left(\frac{x}{y} + 2\right)\left(y - 1\right) = x$. Formăm încă o ecuație scriind că într-o zi se realizează $\frac{1}{5}$ din lucrarea planificată: $\frac{x}{y} + 2 = \frac{x}{5}$.

Sistemul format din aceste două ecuații se rezolvă prin împărțirea lor. Se obține: $y - 1 = 5$ și deci $y = 6$; apoi $x = 60$.

Fiecare tractorist avea de lucrat 60 ha și brigada $60 \cdot 22 = 1\,320$ ha.

Lucrarea trebuia terminată în 6 zile; de fapt s-a terminat în 5 zile.

Dacă am nota cu x numărul de ha ce trebuiau lucrate de fiecare tractorist într-o zi și cu y numărul zilelor în care trebuia terminată lucrarea, se obține în același mod sistemul:

$$(x+2)(y-1) = xy$$

$$x + 2 = \frac{xy}{5}.$$

Acesta se rezolvă ca și cel precedent, obținîndu-se: $x = 10$ ha pe zi; $y = 6$ zile.

Rezultatele sînt, evident, aceleași.

276. Punem $a = m - \frac{3}{2}$ atunci : $a + 1 = m - \frac{1}{2}$, $a + 2 = m + \frac{1}{2}$ şi : $a + 3 = m + \frac{3}{2}$, iar expresia devine :

$$E = \left(m - \frac{3}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{3}{2}\right) + 1 =$$

$$= \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\left(m^2 - \frac{9}{4}\right) + 1 = m^4 - \frac{5}{2}m^2 + \frac{25}{16} =$$

$$= \left(m^2 - \frac{5}{4}\right)^2 = \left[\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]^2 = (a^2 + 3a + 1)^2,$$

ceea ce justifică afirmaţia.

277. După efectuarea calculelor din membrul drept şi trecerea rezultatului în membrul stîng, obţinem ecuaţia :

$$\frac{2b^3 - 4abx - 2a^2 + 2x(a^2 + b^2)}{x^3 - b^4} = 0,$$

sau :

$$\frac{2x(a-b)^2 - 2(a^2 - b^2)}{x^3 - b^4} = 0. \qquad (1)$$

Rădăcina ecuaţiei este dată de :

$$2x(a - b)^2 - 2(a^2 - b^2) = 0,$$

de unde rezultă :

$$x = \frac{a + b}{a - b}.$$

Proba se face înlocuind în ecuaţie valoarea de mai sus a lui x.

Observare. În cazul cînd numărătorul ecuaţiei (1) se simplifică cu unul din factorii numitorului, ecuaţia nu are rădăcină.

278. Dacă notăm cu x numărul de ore pe care le-ar folosi Ion, lucrînd singur, pentru terminarea lucrării, cu y numărul

de ore necesare lui Nicolaie şi cu z cele necesare lui Dumitru, avem următorul sistem :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24\frac{1}{2}}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{21}.$$

Dacă lucrează toţi trei împreună ei efectuează pe oră $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ din lucrare.

Din adunarea ecuaţiilor sistemului (1) deducem :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{2}{49}+\frac{1}{21}\right)=\frac{153}{49.3.8.2}=\frac{51}{49.16}. \qquad (2)$$

Muncind împreună lucrarea se termină în :

$$\frac{49.16}{51}\text{ ore}=15\,\frac{19}{51}\text{ ore}=15^{\text{ore}}\,22^{\text{min}}.$$

Suma de lei 260 trebuia împărţită proporţional cu productivitatea fiecăruia, care în cazul de faţă se măsoară prin cît efectuează fiecare pe oră, adică prin $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$.

Ţinînd seama de (1) şi (2) găsim :

$$\frac{1}{x}=\frac{51}{49.16}-\frac{2}{49}=\frac{19}{49.16};\frac{1}{y}=\frac{41}{49.16.3};\frac{1}{z}=\frac{55}{49.16.3}.$$

Se cuvine fiecăruia suma :

$$\text{Ion}:\frac{260\cdot\frac{19}{49\cdot16}}{\frac{51}{49.16}}=96{,}86\text{ lei};$$

$$\text{Nicolaie}: \frac{260 \cdot \frac{41}{49.16.3}}{\frac{51}{49.16}} = 69{,}67 \text{ lei};$$

$$\text{Dumitru}: \frac{260 \cdot \frac{55}{49.16.3}}{\frac{51}{49.16}} = 93{,}40 \text{ lei}.$$

279. Notăm deîmpărțitul prin x și împărțitorul prin y. Avem de rezolvat sistemul:

$$x = 31y + 11$$

și

$$x + y = 555,$$

a cărui soluție este: $x = 538$; $y = 17$.

280. Dacă notăm cele 4 părți prin x, y, z și t, avem următorul sistem:

$$x = \frac{2}{3}y;\ z = \frac{8}{9}y;\ t = \frac{16\frac{2}{3}}{100}(x + y + z),$$

iar: $x + y + z + t = 966$ m², ale cărui soluții sînt:
$x = 216$ m²; $y = 324$ m²; $z = 288$ m² și $t = 138$ m².

281. Dacă notăm cu x și y numărul copiilor care au fost la început în cele două clădiri, obținem următorul sistem:

$$x = 3y,$$

$$y + 20 = \frac{5}{7}(x - 20),$$

cu soluția: $x = 90$; $y = 30$.

282. Efectuînd calculele în membrul stîng și grupînd termenii în mod convenabil, ajungem la expresia din dreapta. Verificarea identității se mai poate face efectuînd calculele în ambii membri.

283. *Soluție aritmetică.* Dacă bîrnele ar cîntări toate la fel cîte 45,5 kg, atunci în total ar avea greutatea de $45{,}5 \cdot 10 = 455$ kg. Depășirea de $455 - 384{,}20 = 70{,}80$ se datorește depășirii în greutate a fiecărei bîrne de brad cu

$$45{,}5 - 27\frac{4}{5} = 17{,}7.$$

Avem deci $70{,}80 : 17{,}7 = 4$ bîrne de brad și prin urmare 6 bîrne de stejar.

Soluție algebrică. Notăm numărul bîrnelor de brad cu x și deci a celor de stejar este $10 - x$. Ecuația problemei este:

$$27\frac{4}{5}x + 45{,}5\ (10 - x) = 384{,}20,$$

cu soluția $x = 4$.

284. Dacă notăm cu x numărul elevilor corigenți, atunci acel al repetenților este $x - 1$, iar acel al promovaților este:

$$3\ (x + x - 1 + 4) = 6x + 9.$$

Ecuația care ne conduce la valoarea lui x este:

$$x + (x - 1) + (6x + 9) + 1 = 11\ x,$$

cu soluția $x = 3$;
promovați $= 27$; corigenți $= 3$; repetenți $= 2$.

285. Să notăm cu N numărul care are proprietățile din enunț.

Avem: $N = 7c + 6$ și tot $N = 4d + 1$, de unde rezultă:

$$4\ d + 1 = 7c + 6,$$

sau:

$$d = \frac{7c + 5}{4} = \frac{8c - c + 4 + 1}{4} = 2c + 1 - \frac{c-1}{4}.$$

Pentru că d este un număr întreg, înseamnă că $\frac{c-1}{4}$ este de asemeni un număr întreg pe care-l notăm cu m.

Avem deci $\frac{c-1}{4} = m$, sau: $c = 4m + 1$.

Înlocuim această valoare a lui c în egalitatea :

$$N = 7c + 6 \text{ şi obţinem :}$$

$$N = 7(4m + 1) + 6 = 28m + 13,$$

de unde se vede că dacă împărţim pe N prin 28, obţinem restul 13.

286. Avem $(ab) + 2(ba) = 111$,

sau :

$$10a + b + 2(10b + a) = 111,$$

$$12a + 21b = 111.$$

Rezultă, după simplificarea ambilor membri prin 3 :

$$4a + 7b = 37.$$

Scoatem a cu ajutorul lui b :

$$a = \frac{37-7b}{4} = \frac{36+1-8b+b}{4} = 9 - 2b + \frac{1+b}{4}.$$

Pentru ca a să fie întreg, e necesar ca $1 + b = 4m$, unde m este întreg şi pozitiv. Deducem :

$$b = 4m - 1$$

şi $a = 9 - 2(4m - 1) + m = 11 - 7m.$

Cum a este o cifră, nu-i putem da lui m decît valoarea $m = 1$.

Aflăm deci : $a = 4$ şi $b = 3$.

Numărul căutat este deci 43.

În adevăr avem :

$$43 + 2.34 = 111.$$

287. Dacă notăm cu x numărul de grame de zinc şi cu y acel al cuprului, sistemul care ne dă soluţia este :

$$x + y = 490,$$

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{5} = 70,$$

care rezolvat ne dă $x = 315$ gr şi $y = 175$ gr.

288. Notăm cu x partea ce se cuvine fiecăruia şi cu y numărul elevilor clasei.

Ecuaţiile problemei sînt:

$$(x-2)(y+4) = xy,$$

$$(x+2)(y-3) = xy.$$

Soluţia sistemului este $x = 14$; $y = 24$.

Fondul clasei a fost $xy = 336$ lei şi au fost 24 elevi.

289. Din $y = \frac{b-ax}{a-bx}$ deducem:

$$ay - bxy = b - ax, \qquad (1)$$

sau: $ay + ax = b + bxy$, care ne conduce la:

$$a(x+y) = b(1+xy).$$

Rezolvînd în raport cu x, avem:

$$ay - b = x(by - a)$$

şi prin urmare:

$$x = \frac{ay-b}{by-a} = \frac{b-ay}{a-by},$$

ceea ce trebuia dovedit.

290. Punînd $\frac{1}{x} = X$ şi $\frac{1}{y} = Y$, avem sistemul:

$$X + 3Y = \frac{3}{16},$$

$$3X - Y = \frac{7}{48},$$

care rezolvat prin substituţie sau reducere ne dă: $X = \frac{1}{16}$, $Y = \frac{1}{24}$.

Rezultă deci: $x = 16$ şi $y = 24$.

291. Notăm cu x, y, z înălțimile dreptunghiurilor construite respectiv pe laturile a, b, c (fig. 156).

Pe baza datelor problemei avem:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ și} \tag{1}$$

$$ax = by + cz + k^2.$$

Soluția sistemului este:

$$x = \frac{ak^2}{a^2 - b^2 - c^2}, \quad y = \frac{bk^2}{a^2 - b^2 - c^2}, \quad z = \frac{ck^2}{a^2 - b^2 - c^2}.$$

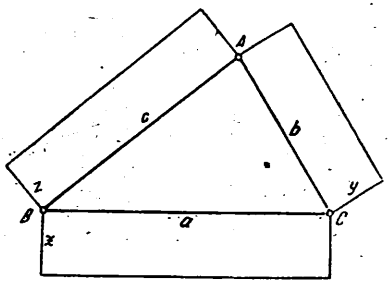


Fig. 156

Problema are sens cînd $b^2 + c^2 < a^2$. Dacă $b^2 + c^2 = a^2$ adică atunci cînd triunghiul ABC este dreptunghic, problema este imposibilă.

292. Ținem seama că avem:

$$x_1 + x_2 = 1.$$

$$x_1 x_2 = a, \tag{1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = a.$$

Împărțind membrii ecuației a II-a la acei ai ecuației a III-a a sistemului (1) obținem $x_2^2 = 1$, sau $x_2 = \pm 1$.

1) Dacă $x_2 = 1$, $x_1 = 0$ și $a = 0$
2) Dacă $x_2 = -1$, $x_1 = 2$ și $a = -2$

Problema admite deci două soluții.

293. Notînd $x + y = u$ și $xy = v$, sistem dat, devine:

$$u + v = 17, \tag{1}$$

$$u^2 - 2v + v^2 = 129.$$

Înlocuind, în a doua, $u = 17 - v$, aflăm ecuația care ne dă:

$$v^2 - 18v + 80 = 0,$$

cu soluțiile $v_1 = 8$ și $v_2 = 10$
și cărora le corespunde $u_1 = 9$ și $u_2 = 7$.

Sistemele care ne dau x și y sînt deci:

I) $\begin{matrix} x+y=9, \\ xy=8. \end{matrix}$ și II) $\begin{matrix} x+y=7, \\ xy=10. \end{matrix}$

Soluțiile acestor sisteme și deci ale sistemului propus sînt:

$$(x=1;\ y=8);\ (x=8;\ y=1);\ (x=2;\ y=5)$$

și

$$(x=5;\ y=2).$$

294. Ecuația a doua se scrie succesiv astfel:

$$\log x^2y = 3 \quad x^2y = 1\,000.$$

Sistemul propus devine:

$$x + \sqrt{y} = 13,$$
$$x^2y = 1\,000.$$

Din prima ecuație scoatem $y = (13 - x)^2$ pe care îl introducem în a doua; avem:

$$x^2 (13 - x)^2 = 1\,000,$$

sau:

$$x(13 - x) = \pm 10\sqrt{10}.$$

Ecuația care ne dă pe x este:

$$x^2 - 13x \pm 10\sqrt{10} = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt date de formula:

$$x_{1,2,3,4,} = \frac{13 \pm \sqrt{169 \pm 40\sqrt{10}}}{2}.$$

Dintre acestea reținem pe cele pozitive, care pot fi soluții pentru ecuația $2 \log x + \log y = 3$.

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{169 - 40\sqrt{10}}}{2}\ ;\ x_2 = \frac{13 + \sqrt{169 - 40\sqrt{10}}}{2}$$ și

$$x_3 = \frac{13 + \sqrt{169 + 40\sqrt{10}}}{2},$$

cărora le corespund y dat de formula $y = (13 - x)^2$.

295. Trebuie să avem $p = 2x_1^2$ și $q = 2x_2^2$ sau invers, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației.

Scriind relațiile între rădăcini și coeficienți, avem sistemul:

$$x_1 + x_2 = -2x_1^2$$

și

$$x_1 x_2 = 2x_2^2.$$

Ecuația a II-a se scrie $x_2(2x_2 - x_1) = 0$, care se desface în $x_2 = 0$ sau $2x_2 = x_1$.

Avem deci de rezolvat sistemele:

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -2x_1^2, \\ x_2 = 0. \end{cases} \qquad \text{și} \quad (2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -2x_1^2, \\ x_1 = 2x_2. \end{cases}$$

Primul ne dă soluțiile:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0 \quad \text{cu } p = 0 \text{ și } q = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 0 \quad \text{cu } p = \frac{1}{2} \text{ și } q = 0.$$

Al doilea sistem conduce la o soluție deja obținută: ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$) și la una nouă:

$$x_1 = -\frac{3}{4}, \qquad x_2 = -\frac{3}{8};$$

$$p = \frac{9}{8}, \qquad q = \frac{9}{32}.$$

Dacă considerăm $p = 2x_2^2$ și $q = 2x_1^2$ ajungem la aceleași soluții, pentru că ceea ce reprezintă x_1 poate reprezenta x_2 și invers.

296. Dacă notăm cu x, y și z dimensiunile paralelipipedului, atunci pe baza datelor problemei, avem:

$$x = \frac{y+z}{2},$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 18, \\ 2(xy + xz + yz) &= 208. \end{aligned} \qquad (1)$$

Volumul rezervorului este $V = xyz$ care se poate calcula de-a dreptul din ecuațiile date.

Ultima ecuație a sistemului (1) ne dă :

$$yz = 104 - x(y + z). \qquad (2)$$

Din primele două ecuații, deducem :
$y + z = 2x$ și $(y + z) + x = 18$ și prin urmare $2x + x = 18$.

Rezultă : $x = 6$ și $y + z = 12$.

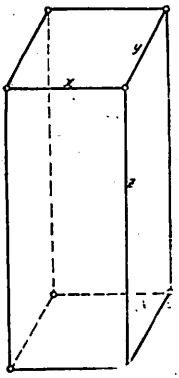


Fig. 157

Înlocuind valorile aflate în (2), obținem :

$$V = 104 - 6.12 = 32 \text{ m}^3 = 32\,000 \text{ dm}^3.$$

Capacitatea este de 32 000 litri = 320 hl.

297. Fie : $N = a^2 + b^2$ un număr care este suma a două pătrate.

Avem : $2N = 2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$,

deci : $2N = (a + b)^2 + (a - b)^2$,

ceea ce dovedește o parte a afirmației din enunț.

Să examinăm acum pe N^2.

Putem scrie succesiv :

$N^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$, sau : $N^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$, ceea ce justifică cealaltă parte a enunțului.

298. Să notăm drumul $\overline{AC} = x$ și $\overline{BC} = y$, iar viteza călătorului din A cu u și a celui ce pleacă din B cu v. Avem de rezolvat sistemul :

$$x - y = 20,$$

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v},$$

$$x = \frac{54}{7} v,$$

și

$$y = \frac{14}{3} u.$$

Acesta are soluția acceptabilă:

$u = 15$ km/oră; $v = \frac{35}{3}$ km/oră; $x = 90$ km; $y = 70$ km.

Distanța dintre cele două localități este deci $x + y = 160$ km.

299. Expresia se transformă identic în modul următor:

$$a^{10} + a^5 + 1 = a^{10} - a^7 + a^7 - a^4 + a^4 - a + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^7(a^3 - 1) + a^4(a^3 - 1) + a(a^3 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1).$$

300. Împărțim ecuația prin 3:

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0.$$

Adăugăm și scădem pătratul jumătății coeficientului lui x pentru a forma un pătrat perfect:

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} - \frac{49}{36} + \frac{2}{3} = 0.$$

Restrîngem pătratul:

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{2}{3} = 0; \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36} - \frac{2}{3} = \frac{25}{36}.$$

Scoatem rădăcina:

$$x - \frac{7}{6} = \pm\frac{5}{6}; \quad x = \frac{7}{6} \pm \frac{5}{6},$$

$$x_1 = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2; \quad x_2 = \frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

301. Putem scrie succesiv:

$$x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

302. Să presupunem $x = 0$, atunci putem pune $y = tx$ şi $z = wx$. Înlocuind în egalităţile date şi simplificînd cu x, obţinem:

$$a(u + t) = 1;\ b(u + 1) = t \text{ şi } c(t + 1) = u.$$

Din primele două ecuaţii deducem:

$$u = \frac{1 - ab}{a(1 + b)} \text{ şi } t = \frac{b(1 + a)}{a(1 + b)}.$$

Aceste valori ale lui u şi t trebuie să verifice ecuaţia a treia. Scriem acest lucru:

$$c\left[\frac{b(1 + a)}{a(1 + b)} + 1\right] = \frac{1 - ab}{a(1 + b)}.$$

După eliminarea numitorilor, efectuarea calculelor şi trecerea tuturor termenilor în membrul stîng, obţinem:

$$ab + ac + bc + 2abc - 1 = 0.$$

303. Aducînd fracţiile la acelaşi numitor, expresia devine succesiv:

$$E = \frac{a^3(c - b) + b^3(a - c) + c^3(b - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)} =$$

$$= \frac{c(a^3 - b^3) - ab(a^2 - b^2) - c^3(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)} = \frac{c(a^2 + ab + b^2) - ab(a + b) - c^3}{(b - c)(c - a)} =$$

$$= \frac{ab(c - a) - c(c^2 - a^2) + b^2(c - a)}{(b - c)(c - a)} = \frac{ab - c(c + a) + b^2}{b - c} =$$

$$= \frac{a(b - c) + (b^2 - c^2)}{b - c} = a + b + c.$$

304. Să considerăm cazul mai general a n fracţii cu numitorul pozitiv:

$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \ldots \frac{a_n}{b_n}$ şi să arătăm că fracţia $\frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n}{b_1 + b_2 \ldots + b_n}$ este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare dintre fracţiile date.

Să presupunem fracțiile date așezate în ordinea lor de mărime :

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \ldots < \frac{a_n}{b_n} \qquad (1)$$

Dacă notăm $k = \frac{a_1}{b_1}$ și $l = \frac{a_n}{b_n}$, rezultă din (1) următoarele duble neegalități :

$$\begin{aligned} kb_1 = a_1 < lb_1, \\ kb_2 < a_2 < lb_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ kb_n < a_n = lb_n. \end{aligned}$$

Adunînd membru cu membru, obținem :

$$k(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) < a_1 + a_2 + \ldots + a_n < l(b_1 + b_2 + \ldots b_n).$$

Împărțind peste tot cu numărul pozitiv $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ (pentru că s-a presupus că numitorii fracțiilor sînt pozitivi) deducem :

$$k < \frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n}{b_1 + b_2 \ldots + b_n} < l,$$

ceea ce demonstrează și afirmația din enunț.

305. Notăm cu k valoarea comună a șirului de rapoarte egale :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k,$$

de unde rezultă :

$$c = dk\,;\ b = ck = dk^2 \text{ și } a = bk = dk^3.$$

Înlocuind aceste expresii ale lui c, b și a sub radical, obținem :

$$E = \sqrt{\frac{a^5 + b^2c^2d + a^3c^2}{d^5 + b^2cd^2 + b^4c}} = \sqrt{\frac{d^5k^{15} + d^5k^6 + d^5k^{11}}{d^5 + d^5k^5 + d^5k^9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{d^5k^6(1+k^5+k^9)}{d^5(1+k^5+k^9)}} = k^3.$$

Avînd în vedere că $a = dk^3$, deducem $k^3 = \frac{a}{d}$ şi prin urmare avem :

$$E = \frac{a}{d},$$

ceea ce trebuia dovedit.

306. Se observă că dacă sistemul admite o soluţie în care numai o valoare a lui x, y sau z este nulă, atunci şi celelalte sînt în mod necesar tot nule.

Într-adevăr, dacă $x = 0$ face parte dintr-o soluţie, avem din prima ecuaţie :

$$0 = 0 + by,$$

de unde rezultă în cazul $b \neq 0$ că şi $y = 0$. Înlocuind această valoare a lui y în ecuaţia a doua, obţinem şi $z = 0$.

Să căutăm soluţiile sistemului diferite de $(0\,;\ 0\,;\ 0)$. Împărţim ambii membri ai primei ecuaţii prin xy, ai celei de a doua prin yz şi ai celei de a treia prin zx.

Sistemul dat se înlocuieşte prin următorul echivalent :

$$\begin{aligned} \frac{b}{x} + \frac{a}{y} &= 1, \\ \frac{b}{y} + \frac{a}{z} &= 1, \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{z} &= 1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Dacă notăm : $\frac{1}{x} = X$; $\frac{1}{y} = Y$; $\frac{1}{z} = Z$, sistemul (1) devine :

$$\begin{aligned} bX + aY &= 1, \\ bY + aZ &= 1, \\ aX + bZ &= 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Acest sistem rezolvat prin metoda substituţiei sau a reducerii ne conduce la soluţia :

$$X = \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^3 + b^3} = \frac{1}{a + b}\ ;\quad Y = \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^3 + b^3} = \frac{1}{a + b}\ ;$$

$$Z = \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^3 + b^3} = \frac{1}{a + b}.$$

De unde rezultă că în cazul cînd $a + b \neq 0$ soluția sistemului inițial este :

$$x = y = z = a + b.$$

Să examinăm acum și cazurile cînd a și b iau anumite valori particulare excepționale.

1) Cazul cînd $b = 0$, sistemul dat devine :

$$xy = ax\,;\ yz = ay\,;\ zx = az,$$

cu soluțiile : $(x = 0\,;\ y = 0\,;\ z = 0)$ și $(x = y = z = a)$.

2) Cazul cînd $a = 0$, sistemul are soluțiile :

$(x = y = z = 0)$ și $(x = y = z = b)$.

3) În cazul cînd $b + a = 0$, sistemul devine :

$$xy = a(x - y)\,;\ yz = a(y - z)\,;\ zx = a(z - x)$$

care nu admite decît soluția : $(x = y = z = 0)$.

307. Expresia dată se poate transforma succesiv, astfel :

$$E = b\,[c\,(b + c) - a\,(a + b)] + ca\,(c - a) = b\,(c^2 - a^2 + \\ + bc - ab) + ac\,(c - a),$$

$$E = b\,[(c - a)\,(c + a) + b\,(c - a)] + ac\,(c - a) = \\ (c - a)\,(bc + ab + b^2) + ac\,(c - a),$$

$$E = (c - a)\,[b\,(a + b) + c\,(a + b)] = (c - a)\,(a + b)\,(b + c).$$

308. Considerăm expresia ca un polinom care poate fi ordonat după puterile lui a, ale lui b sau ale lui c. Dacă înlocuim a prin b obținem :

$$b\,(b - c)^3 + b\,(c - b)^3 + c\,(b - b)^3 = 0.$$

Tot zero se obține dacă înlocuim b prin c și c prin a.

Deducem din cele arătate pînă aci că expresia E este divizibilă prin $a - b$, $b - c$ și $c - a$; prin urmare și prin produsul lor.

Avem deci :

$$E\,(a, b, c) = (a - b)\,(b - c)\,(c - a)\,E_1\,(a, b, c),$$

unde $E_1\,(a, b, c)$ este un polinom omogen de gradul întîi pentru că $E\,(a, b, c)$ este omogen de gradul al patrulea.

Se poate constata că $E_1(a, b, c)$ este un polinom simetric. Într-adevăr, avem :

$$E_1(a, b, c) = \frac{(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Dacă schimbăm în E_1 pe a prin b, obţinem :

$$E_1(b, a, c) = \frac{b(a-c)^3 + a(c-b)^3 + c(b-a)^3}{(b-a)(a-c)(c-b)} = E(a, b, c) \text{ etc.}$$

Rezultă deci că E_1 este simetric şi omogen de gradul întîi, deci E_1 are forma $k(a+b+c)$, unde k este un coeficient ce trebuie determinat. Pentru determinarea lui k dăm lui a valoarea 2, lui b valoarea 1 şi lui c valoarea 0, în egalitatea :

$E = (a-b)(b-c)(c-a)\,k(a+b+c)$, de unde obţinem $K = 1$ şi prin urmare : $E = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

309. Notăm $a^2 = \alpha$; $b^2 = \beta$; $c^2 = \gamma$, după care expresia devine :

$$E = \alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta).$$

Transformăm expresia, succesiv, astfel :

$$E = \alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2\gamma - \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha - \gamma^2\beta =$$

$$= \alpha^2(\beta - \gamma) + \beta\gamma(\beta - \alpha) - \alpha(\beta^2 - \gamma^2).$$

Dînd factor comun pe $(\beta - \gamma)$ şi grupînd, convenabil, termenii rămaşi în paranteză după darea factorului comun, obţinem :

$$E = (\beta - \gamma)(\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha^2) =$$

$$= (\beta - \gamma)[\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \alpha)] = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha).$$

Avem deci :

$$E = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2),$$

sau :

$$E = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b)(a+c)(b+c).$$

310. Ridicînd la pătrat ambii membri ai egalităţii date obţinem :

$$(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + 2\sqrt{a_1a_2b_1b_2}$$
$$+ 2\sqrt{a_1a_2c_1c_2} + 2\sqrt{b_1b_2c_1c_2}.$$

După reducerea unor termeni și trecerea tuturor celor rămași în membrul stîng, obținem:

$$(a_1b_2 - 2\sqrt{a_1a_2b_1b_2} + a_2b_1) + (a_1c_2 - 2\sqrt{a_1a_2c_1c_2} + a_2c_1) +$$
$$+ (b_1c_2 - 2\sqrt{b_1b_2c_1c_2} + b_2c_1) = 0,$$

sau

$$(\sqrt{a_1b_2} - \sqrt{a_2b_1})^2 + (\sqrt{a_1c_2} - \sqrt{a_2c_1})^2 + (\sqrt{b_1c_2} - \sqrt{b_2c_1})^2 = 0.$$

Această ultimă egalitate este posibilă numai dacă avem:

$$\sqrt{a_1b_2} - \sqrt{a_2b_1} = 0\,;\ \sqrt{a_1c_2} - \sqrt{a_2c_1} = 0 \text{ și } \sqrt{b_1c_2} - \sqrt{b_2c_1} = 0,$$

de unde deducem:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ceea ce trebuia dovedit.

311. Dacă notăm $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ și $y = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, avem: $x^3 + y^3 = 40$ și $x^3y^3 = 400 - 392 = 8$ și prin urmare $xy = 2$. Problema cere să calculăm pe $x + y$.

Din relația $x^3 + y^3 = 40$ deducem:

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 40$, sau dacă înlocuim:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, găsim:

$(x + y)\ [(x + y)^2 - 3xy] = 40.$

Notăm $x + y = S$ și înlocuim $xy = 2$, obținem ecuația de gradul al treilea:

$$S^3 - 6S - 40 = 0,$$

care se descompune în:

$$(S - 4)(S^2 + 4S + 10) = 0$$

cu rădăcinile:

$$S_1 = 4 \text{ și } S_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4 - 10} = -2 \pm i\sqrt{6}.$$

Pe noi ne interesează valoarea reală a lui S care este 4; prin urmare avem:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

312. După teorema lui Pitagora, avem:

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Să înmulțim ambii membri ai relației (1) prin c^{n-2}, unde $n > 2$, obținem:

$$c^n = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2}. \tag{2}$$

Avînd în vedere că $a < c$ și $b < c$ rezultă (dat fiind că $n > 2$):

$$a^{n-2} < c^{n-2} \text{ și } b^{n-2} < c^{n-2}. \tag{3}$$

Înmulțind ambii membri ai neegalităților (3) prin a^2, respectiv b^2, deducem:

$$a^n < c^{n-2}\,a^2 \text{ și } b^n < c^{n-2}\,b^2.$$

Adunînd membru cu membru, obținem:

$$a^n + b^n < c^{n-2}\,a^2 + c^{n-2}\,b^2 = c^n,$$

adică:

$$a^n + b^n < c^n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

313. Notăm $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}} = x_n$. După ridicare la pătrat, rezultă $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$, iar E devine:

$$E = \frac{2-x_n}{2-x_{n-1}} = \frac{2-x_n}{2-(x_n^2-2)} = \frac{2-x_n}{4-x_n^2} = \frac{1}{2+x_n}.$$

Neegalitatea de demonstrat este deci:

$$\frac{1}{2+x_n} > \frac{1}{4},$$

sau: $2 + x_n < 4$, care se reduce la:

$$x_n < 2.$$

Pentru a demonstra aceasta din urmă, presupunem adevărată:

$$x_n < 2.$$

Adăugăm în ambii membri pe 2 şi extragem rădăcina pătrată, obţinem :

$$\sqrt{2} + x_n < \sqrt{4}, \text{ sau } x_{n+1} < 2.$$

Neegalitatea fiind adevărată pentru n, rezultă că este adevărată pentru $n + 1$. Neegalitatea este adevărată pentru $n = 1$ pentru că avem evident $\sqrt{2} < 2$, urmează deci că e adevărată pentru $n = 2$, apoi pentru $n = 3$ ş.a.m.d., ceea ce demonstrează neegalitatea dată.

314. Trecînd termenul $\frac{1}{x}$ în membrul drept, ecuaţia devine :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x},$$

sau :

$$\frac{a+b}{ab} = -\frac{a+b}{x(a+b+x)}.$$

Presupunînd $a + b \neq 0$, ecuaţia obţinută este echivalentă cu :

$$x(x + a + b) = -ab,$$

ale cărei rădăcini sînt : $x_1 = -a$ şi $x_2 = -b$.

Presupunînd : $a + b = 0$, avem : $b = -a$. În acest caz egalitatea propusă devine :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \text{ adică o identitate.}$$

315. Înmulţind egalităţile, membru cu membru, obţinem :

$$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7)^2 = 1.2.3.4.5.6.7 = 7!$$

şi prin urmare : $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \varepsilon\sqrt{7!}$ $(\varepsilon = \pm 1)$. (1)

Împărţind ambii membri ai ecuaţiei (1) la membrii egalităţii obţinute din înmulţirea, membru cu membru, a ecuaţiilor :

$x_2x_3 = 2$; $x_4x_5 = 4$ şi $x_6x_7 = 6$, obţinem :

$$x_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{2.4.6}. \quad (2)$$

Prin împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei (1), respectiv la produsul membrilor ecuaţiilor :

$$x_3x_4 = 3\,;\ x_5x_6 = 5\,;\qquad x_7x_1 = 7,\ \text{aflăm :}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{3\cdot 5\cdot 7}$$

şi tot astfel obţinem :

$$x_3 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{4\cdot 6\cdot 1}\ ;\ x_4 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{5\cdot 7\cdot 2}\ ;\ x_5 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{6\cdot 1\cdot 3}\ ;\ x_6 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{7\cdot 2\cdot 4}$$

$$\text{şi}\ \ x_7 = \frac{\varepsilon\sqrt{7!}}{1\cdot 3\cdot 5}\,.$$

316. După efectuarea calculelor şi a reducerilor, obţinem :

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 3x^2 + 2(a + p)x + ap + q = 0. \qquad (1)$$

Discriminantul ecuaţiei (1) este :

$$\Delta = 4(a + p)^2 - 12(ap + q) = 4(a^2 - ap + p^2 - 3q). \qquad (2)$$

Să exprimăm pe Δ cu ajutorul discriminantului δ al ecuaţiei : $x^2 + px + q = 0$.

Din relaţia $\delta = p^2 - 4q$, deducem : $q = \frac{p^2 - \delta}{4}$, pe care o introducem în (2).

Rezultă :

$$\Delta = 4\left[a^2 - ap + p^2 - \frac{3(p^2 - \delta)}{4}\right] = (p - 2a)^2 + 3\delta. \qquad (3)$$

Din expresia (3) a lui Δ se vede că dacă $\delta > 0$, atunci şi $\Delta > 0$ ceea ce demonstrează justeţea enunţului.

317. Eliminînd numitorii, obţinem ecuaţia :

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + ac + bc) = 0, \qquad (1)$$

al cărei discriminant este :

$$\Delta = (a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc),$$

sau :

$$\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2}$$

sau :

$$\Delta = \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)}{2}$$

şi prin urmare : $\Delta = \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2}$.

Discriminantul fiind o sumă de pătrate, este pozitiv pentru orice valori ale lui a, b şi c, ecuaţia are deci rădăcini reale pentru orice valori ale lui a, b şi c.

Observare. Numărul de rădăcini ale ecuaţiei se reduce în anumite situaţii. Astfel, dacă două numere a, b, c sînt egale, ecuaţia dată nu admite decît o rădăcină, iar în cazul cînd $a = b = c$, ecuaţia dată nu admite nici o rădăcină.

Ecuaţia propusă are întotdeauna două rădăcini reale şi distincte numai dacă avem $a \neq b \neq c$.

318. Din ecuaţia dată rezultă, prin trecerea unor termeni dintr-un membru într-altul :

$$a^2x^2 + b^2 = p^2x^2 - 2pqx + q^2 = (px - q)^2,$$

unde x este o rădăcină a ecuaţiei.

Avem deci :

$$E = (a^2x_1^2 + b^2)(a^2x_2^2 + b^2) = (px_1 - q)^2 (px_2 - q)^2 =$$
$$= [p^2x_1x_2 - pq(x_1 + x_2) + q^2].$$

Pe de altă parte, avem :

$$x_1 + x_2 = \frac{2pq}{p^2 - a^2} \text{ şi } x_1x_2 = \frac{q^2 - b^2}{p^2 - a^2},$$

de unde rezultă :

$$E = \left(p^2 \cdot \frac{q^2 - b^2}{p^2 - a^2} - pq \cdot \frac{2pq}{p^2 - a^2} + q^2\right)^2 = \left(\frac{p^2b^2 + a^2q^2}{p^2 - a^2}\right)^2,$$

care răspunde la toate întrebările problemei.

319. Produsul rădăcinilor este 1; $x_1x_2 = 1$. Pentru calcularea sumei, raționalizăm numitorul rădăcinii x_1. Avem:

$$x_1 = \frac{(m+1)\ (2m+3-\sqrt{3m^2+10m+8})}{(2m+3)^2-(3m^2+10m+8)} = \frac{2m+3-\sqrt{3m^2+10m+8}}{m+1}.$$

Rezultă: $x_1 + x_2 = \frac{2(2m+3)}{m+1}$.

a) Ecuația cu rădăcinile x_1 și x_2 este:

$$(m+1)\,x^2 - 2\,(2m+3)\,x + m + 1 = 0. \qquad (1)$$

b) Relația dată se scrie sub forma $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{17}{4}$, de unde rezultă:

$$\frac{4(2m+3)^2}{(m+1)^2} - 2 = \frac{17}{4} \text{ sau } \frac{2(2m+3)}{m+1} = \pm\frac{5}{2},$$

cu soluțiile: $m_1 = -\frac{7}{3}$ și $m_2 = -\frac{17}{13}$, pentru care ecuația (1) devine respectiv:

$$4x^2 - 10x + 4 = 0,$$

și

$$4x^2 + 10x + 4 = 0.$$

c) Cele două ecuații diferă numai prin semnele coeficienților lui x. Înseamnă că rădăcinile ecuației a II-a sînt egale și de semn contrar cu rădăcinile primei ecuații. Explicația constă în faptul că relația $x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4}$ de la care am pornit pentru determinarea lui m este verificată simultan de:

$$(x_1, x_2) \text{ și } (-x_1, -x_2), \text{ iar } x_1x_2 = 1.$$

d) Reprezentarea trinoamelor:

$$y = 4x^2 - 10x + 4 = 4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

și

$$y = 4x^2 + 10x + 4 = 4\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

în același plan al axelor Ox și Oy este următoarea (fig. 158):

Cele două parabole sînt simetrice față de axa Oy și au punctul comun (0,4).

320. Ecuația dată se scrie sub forma:

$$x + y + z - \frac{1}{2^{n+2}}(4x + 2y + z) = 0.$$

Ca această ecuație să fie verificată pentru orice n, trebuie să avem simultan:

$$x + y + z = 0,$$
$$4x + 2y + z = 0.$$

Presupunem z cunoscut și aflăm x, y în funcție de z.

Obținem: $x = \frac{z}{2}$ și $y = -\frac{3z}{2}$,

sau dacă punem $z = 2m$, atunci:

$$x = m \text{ și } y = -3m.$$

Astfel că toate soluțiile sistemului sînt cuprinse în:

$$x = m;\ y = -3m \text{ și } z = 2m,$$

unde m este un număr oarecare. Sistemul este nedeterminat.

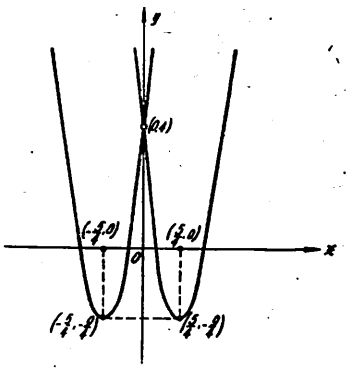


Fig. 158

321. Avem: $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8 = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = 0$,

de unde rezultă:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0. \qquad (1)$$

Din $E_1 + E_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$ și ecuația (1) deducem:

$$x_7 + x_8 = -3. \qquad (2)$$

Ținînd seama de ecuația (2) și ecuația $E_6 = -6$, obținem:

$$x_6 + -3.$$

Înlocuind această valoare în $E_4 = -3$, deducem :

$$x_4 + x_5 = 0. \tag{3}$$

Ecuațiile (3) și $E_3 = 3$ ne dau $x_3 = 3$.

Înlocuind $x_3 = 3$ în $E_1 = 6$ și ținînd seama de $E_8 = 2$, obținem :

$$x_8 = -1.$$

Din $E_6 = -6$ unde înlocuim valorile aflate pentru x_6 și x_8, obținem : $x_7 = -2$ ș.a.m.d.

Soluția sistemului este :

$$x_1 = 1\,;\ x_2 = 2\,;\ x_3 = 3\,;\ x_4 = 4\,;\ x_5 = -4\,;\ x_6 = -3\,;\ x_7 = -2$$
$$x_8 = -1.$$

322. Trecînd pătratele din dreapta în primii membri și descompunînd diferențele de pătrate, obținem sistemul :

$$\begin{aligned} (x + y - z)\ (x + z - y) &= a, \\ (x + y - z)\ (y + z - x) &= b, \\ (x + z - y)\ (y + z - x) &= c. \end{aligned} \tag{1}$$

Înmulțind membru cu membru deducem :

$$(y + z - x)\quad (x + z - y)\quad (x + y - z) = \varepsilon\sqrt{abc},$$
$$\text{unde}\quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2}$$

Împărțind ambii membri ai acestei ecuații cu membrii fiecărei ecuații (1), obținem :

$$\begin{aligned} y + z - x &= \frac{\varepsilon\sqrt{abc}}{a}, \\ x + z - y &= \frac{\varepsilon\sqrt{abc}}{b}, \\ x + y - z &= \frac{\varepsilon\sqrt{abc}}{c}. \end{aligned} \tag{3}$$

Prin adunarea ecuațiilor (3) deducem :

$$x + y + z = \varepsilon\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \tag{4}$$

Scăzînd din ecuația (4) fiecare ecuație (3), obținem;

$$x = \frac{\varepsilon\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);\quad y = \frac{\varepsilon\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \text{ și}$$

$$z = \frac{\varepsilon\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

323. Sistemul dat se mai scrie și astfel:

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv x(x+y+z) = 6,\\ E_2 &\equiv y(x+y+z) = 12, \qquad (1)\\ E_3 &\equiv z(x+y+z) = 18. \end{aligned}$$

Adunînd membru cu membru ecuațiile sistemului (1), obținem:

$$(x+y+z)^2 = 36,$$

de unde rezultă: $x+y+z = \pm 6$. (2)

Împărțind membru cu membru ai fiecărei ecuații a sistemului (1) la cei ai ecuației (2), deducem:

$x = \pm 1;\ y = \pm 2$ și $z = \pm 3$.

Astfel, două soluții ale sistemului dat spre rezolvare sînt:

$(x=1;\ y=2;\ z=3)$ și $(x=-1;\ y=-2;\ z=-3)$.

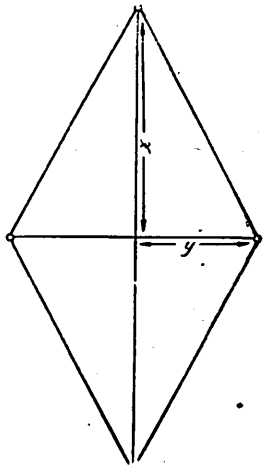


Fig. 159

324. Aplicînd relațiile între rădăcini și coeficienți ($x_1 = p$; $x_2 = q$), obținem sistemul:

$$\begin{aligned} p+q &= -p,\\ pq &= q. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ecuația a doua a acestui sistem ne dă $q(p-1) = 0$, cu soluțiile $q = 0$ sau $p = 1$.

1) Pentru $q = 0$, obținem din prima ecuația $p = 0$.

2) Pentru $p = 1$, obținem $q = -2$.

325. Dacă notăm cu x și y jumătățile diagonalelor rombului, atunci latura este $\sqrt{x^2+y^2}$ și aria $2xy$ (fig. 159).

Ne revine, ca din expresiile :

$$4\sqrt{x^2+y^2}=2p, \quad \text{sau} \quad x^2+x^2=\frac{p^2}{4} \text{ şi}$$

$$2x+2y=m, \quad \text{sau} \quad x+y=\frac{m}{2}$$

să calculăm $A=2xy$.

Avem : $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$

şi prin urmare : $A=\frac{m^2}{4}-\frac{p^2}{4}=\frac{m^2-p^2}{4}$.

326. Să descompunem numărătorul în factori de gradul II. Avem :

$$N=x^4-16x^2+4=x^4+4x^2+4-20x^2=(x^2+2)^2-$$
$$-(2\sqrt{5}x)^2=(x^2-2\sqrt{5}x+2)(x^2+2\sqrt{5}x+2).$$

Aflăm rădăcinile trinoamelor :

$x^2-2\sqrt{5}x+2$ are rădăcinile $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm\sqrt{3}$,

iar $x^2+2\sqrt{5}x+2$ are rădăcinile $x_{3,4}=-\sqrt{5}\pm\sqrt{3}$.

Pe baza acestor rezultate, aflăm :

$$N=(x-\sqrt{5}-\sqrt{3})(x-\sqrt{5}+\sqrt{3})(x+\sqrt{5}-\sqrt{3})(x+\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

Înlocuind pe N la numărătorul fracţiei şi ţinînd seama de numitor, deducem :

$$F=(x-\sqrt{5}-\sqrt{3})(x+\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

327. Înmulţind membru cu membru, obţinem :

$$(xyz)^2-abc\ (xyz)=0,$$

sau :

$$(xyz)\ (xyz-abc)=0.$$

Putem avea : $x=0$; atunci $y=0$ şi $z=0$,

sau $xyz = abc$; atunci $x^2 = bc$, $y^2 = ac$ şi $z^2 = ab$, cu soluţiile:

$$(x = \sqrt{bc} \quad y = \sqrt{ac} \quad z = \sqrt{ab})$$
$$(x = -\sqrt{bc} \quad y = -\sqrt{ac} \quad z = \sqrt{ab})$$
$$(x = -\sqrt{bc} \quad y = \sqrt{ac} \quad z = -\sqrt{ab})$$
$$(x = \sqrt{bc} \quad y = -\sqrt{ac} \quad z = -\sqrt{ab})$$

328. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei date prin $\sqrt{a}$, obţinem:

$$1 + \cfrac{x}{a + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{a}}} = \lambda,$$

care devine: $x^2 + a(3 - 2\lambda)x - a^2(\lambda - 1) = 0$.

Ni se cere să determinăm λ astfel că avem:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{1}{a}.$$

Ţinînd seama că $x_1 + x_2 = a(2\lambda - 3)$ şi că $x_1 x_2 = a^2(1 - \lambda)$, relaţia (1) devine:

$$\frac{a(2\lambda - 3)}{a^2(1 - \lambda)} + \frac{1}{a(2\lambda - 3)} = \frac{1}{a},$$

sau:

$$\frac{2\lambda - 3}{1 - \lambda} + \frac{1}{2\lambda - 3} = 1,$$

care devine: $6\lambda^2 - 18\lambda + 13 = 0$

cu rădăcinile: $\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{3}}{6}$.

329. Avînd în vedere că $x_1 + x_2 = -p$ şi $x_1 x_2 = q$ calculăm: $X_1 + X_2 = \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^2}$,

sau: $X_1 + X_2 = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^2} = \frac{-p^3 + 3pq}{q^2}$

şi: $X_1 X_2 = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{q}$.

Ecuația care admite ca rădăcini pe X_1 și X_2 este :

$$q^2X^2 + (p^3 - 3pq)\ X + q = 0.$$

Discriminantul acestei ultime ecuații este :

$$\Delta = p^2(p^2 - 3q)^2 - 4q^3.$$

Dacă notăm cu δ discriminantul ecuației $x^2 + px + q = 0$, avem $\delta = p^2 - 4q$, și prin urmare $p^2 = \delta + 4q$.

Înlocuind această ultimă expresie a lui p^2 în formula lui Δ, obținem :

$$\Delta = (\delta + 4q)\ (\delta + q)^2 - 4q^3 = = \delta^3 + 6q\,\delta^2 + 9q^2\delta,$$

de unde rezultă :

$$\Delta = \delta\,(\delta + 3q)^2,$$

ceea ce confirmă că Δ este divizibil prin δ.

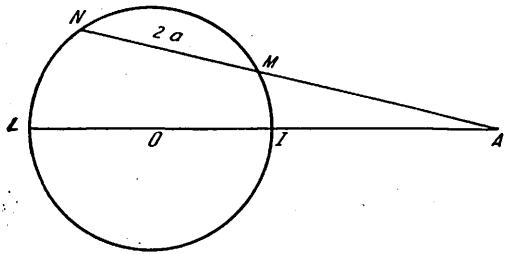


Fig. 160

330. Notăm $\overline{AM} = x$ (fig. 160), atunci $\overline{AN} = x + 2a$.

Aplicînd proprietatea puterii unui punct față de un cerc avem :

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AI} \cdot \overline{AL},$$

sau :

$$x\,(x + 2a) = d^2 - R^2, \qquad (1)$$

ale cărei soluții sînt :

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + d^2 - R^2}.$$

Problema este posibilă numai dacă $a^2 + d^2 \geqslant R^2$.

331. Eliminînd numitorii, obținem ecuația :

$$(a - x) - (a + x) = b\sqrt{a^2 - x^2},$$

sau :

$$-2x = b\sqrt{a^2 - x^2},$$

de unde rezultă, după ridicarea la pătrat a ambilor membri:

$$x = \frac{\pm ab}{b^2 + 4}.$$

332. Simultan cu relaţiile date, avem şi următoarele:

$$x_1 + x_2 = -p; \qquad x_1 x_2 = q. \tag{1}$$

Rezolvînd sistemul de gradul I cu 2 necunoscute x_1, x_2, avem:

$$x_1 - 2x_2 = 2$$
$$2x_1 - 3x_2 = 5,$$

găsim:

$$x_1 = 1 \quad \text{şi} \quad x_2 = 4.$$

Înlocuind valorile aflate în sistemul (1), obţinem:

$$p = -5 \quad \text{şi} \quad q = 4.$$

333. Din faptul că x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 + px + q = 0, \quad \text{rezultă:}$$
$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{şi} \quad x_1 x_2 = q,$$

iar din celelalte date, avem:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p \quad \text{şi} \quad (x_1 + 1)(x_2 + 1) = pq.$$

Sîntem puşi astfel în situaţia de a rezolva sistemul de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute x_1, x_2, p, q.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = -p, \\ &x_1 x_2 = q, \\ &x_1 + x_2 = p - 2, \\ &x_1 x_2 + x_1 + x_2 = pq - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Prima şi a treia ecuaţie a sistemului (1) ne dau:

$-p = p - 2$, de unde rezultă $p = 1$.

Din primele două ecuaţii şi a patra deducem:

$$q - p = pq - 1, \quad \text{care dă} \quad q = -1.$$

Pentru a afla x_1 şi x_2 rezolvăm sistemul $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 x_2 = -1$, care ne dă:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

334. Adunînd, membru cu membru, cele două ecuaţii, obţinem:

$$(x + y)^3 + 64 = 0,$$

de unde rezultă ecuaţia care corespunde soluţiilor reale:

$$x + y = -4.$$

Introducem $y = -(4 + x)$ în prima ecuaţie a sistemului. Se obţine ecuaţia care ne dă x:

$$x^2 + 12x + 27 = 0$$

cu rădăcinile: $x_1 = -3$; $x_2 = -9$,
cărora le corespunde: $y_1 = -1$; $y_2 = 5$.
Soluţiile reale ale sistemului sînt deci:

$$(x = -3;\ y = -1) \quad \text{şi} \quad (x = -9;\ y = 5).$$

335. Din ecuaţia a doua avem $5y = 24 - x^2 - 4x$, pe care o introducem în ecuaţia întîi, după care obţinem:

$$x(x + 1)(24 - x^2 - x) = 144. \qquad (1)$$

Înlocuim $x(x + 1) = z$ în ecuaţia (1) şi avem astfel de rezolvat:
$z(24 - z) = 144$ sau $z^2 - 24z + 144 = 0$, care se restrînge în ecuaţia $(z - 12)^2 = 0$ cu soluţia unică $z = 12$.
Sistemul dat se înlocuieşte acum cu următorul:

$$x(x + 1) = 12,$$
$$5y = 24 - x^2 - 4x. \qquad (2)$$

Din ecuaţia întîi a sistemului (2) obţinem:

$$x_1 = 3 \quad \text{şi} \quad x_2 = -4$$

şi prin urmare, avem:

$$y_1 = \frac{3}{5} \quad \text{şi} \quad y_2 = \frac{24}{5}.$$

Soluțiile sistemului sînt:

$$\left(x = 3;\quad y = \frac{3}{5}\right) \text{ și } \left(x = -4;\quad y = \frac{24}{5}\right).$$

336. Trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice oarecare pot fi puși sub forma: $a - r$, a, $a + r$ unde r e rația, iar acei ai progresiei geometrice: $\frac{b}{q}$, b, bq unde q este rația.

Pentru a constata care sumă e mai mare, să calculăm diferența acestor sume:

$$d = \left(\frac{b}{q} + b + bq\right) - (a - r + a + a + r) = b - a \qquad (1)$$

(la calculul diferenței am avut în vedere că $\frac{b}{q} = a - r$ și $bq = a + r$).

Din cele două egalități scrise în paranteza precedentă deducem:

$$2a = b\left(q + \frac{1}{q}\right), \text{ sau: } a = \frac{b}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right).$$

Înlocuim această ultimă expresie a lui a în (1), după care obținem:

$$d = b - \frac{b}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right) = b\left(1 - \frac{q}{2} - \frac{1}{2q}\right) = -\frac{b}{2q}(q-1)^2.$$

Din acest ultim rezultat se vede că dacă primul termen al progresiei geometrice $\frac{b}{q}$ (deci și a celei aritmetice) este pozitiv, atunci $d < 0$ și prin urmare suma termenilor progresiei geometrice este mai mică decît aceea a progresiei aritmetice, iar dacă $\frac{b}{q} < 0$ rezultă $d > 0$ și prin urmare suma termenilor în progresie geometrică este mai mare decît suma termenilor în progresie aritmetică.

337. Din relația dată deducem succesiv:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{A+B+C} - \frac{1}{C} = \frac{-(A+B)}{C(A+B+C)},$$

$$(A+B)\,C\,(A+B+C) = -AB\,(A+B),$$

$$(A+B)\,[C(A+B+C) + AB] = 0.$$

Grupînd convenabil, ultima relație devine:

$$(A + B)\ \ (A + C)\ \ (B + C) = 0,$$

care implică $A = -B$ sau $A = -C$ sau $B = -C$.

În oricare din aceste ultime cazuri, cînd ridicăm ambii membri la o putere n impară, obținem:

$$A^n = -B^n, \text{ sau } A^n = -C^n, \text{ sau } B^n = -C^n;$$

prin urmare: $A^n + B^n = 0$, sau $A^n + C^n = 0$, sau $B^n + C^n = 0$ și $\frac{1}{A^n} + \frac{1}{B^n} = 0$, sau $\frac{1}{A^n} + \frac{1}{C^n} = 0$, sau $\frac{1}{B^n} + \frac{1}{C^n} = 0$.

Avînd în vedere aceste rezultate deduse din: $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{A + B + C}$, este evident că are loc și egalitatea:

$$\frac{1}{A^n} + \frac{1}{B^n} + \frac{1}{C^n} = \frac{1}{A^n + B^n + C^n}$$

cînd n este un număr întreg impar.

338. Ecuația care dă pe y în funcție de x este:

$$y^2 - (x + 1)\ y + (x^2 - x) = 0.$$

Formula de rezolvare ne dă:

$$y = \frac{x+1 \pm \sqrt{-3x^2 + 6x + 1}}{2}.$$

Pentru ca y să fie număr întreg este necesar în primul rînd, să avem:

$$-3x^2 + 6x + 1 \geqslant 0$$

care ne dă:

$$\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Valorile întregi ale lui x cuprinse între cele două limite sînt numai 0; 1; 2.

Pentru	$x = 0$	$y_1 = 0$	și	$y_2 = 1$
„	$x = 1$	$y_1 = 0$	și	$y_2 = 2$
„	$x = 2$	$y_1 = 1$	și	$y_2 = 2$

Astfel că soluţiile întregi ale ecuaţiei date sînt perechile de numere :

$$(0\,;0),\ (0\,;1),\ (1\,;0),\ (1\,;2),\ (2\,;1) \text{ şi } (2\,;2).$$

339. Considerăm neegalitatea cunoscută :

$$(a+b)^2 \leqslant 2\,(a^2+b^2), \qquad (1)$$

care are ambii membri pozitivi.

Ridicăm la pătrat, membru cu membru, după care obţinem :

$$(a+b)^4 \leqslant 4\,(a^4+b^4) + 4.\ 2a^2b^2. \qquad (2)$$

Înlocuind în (2) pe $2\,a^2b^2$ prin expresia echivalentă

$$a^4 + b^4 - (a^2-b^2)^2$$

neegalitatea devine :

$$(a+b)^4 \leqslant 4\,(a^4+b^4) + 4\ [(a^4-b^4) - (a^2-b^2)^2],$$

sau : $(a+b)^4 \leqslant 8\ (a^4+b^4) - 4\ (a^2-b^2)^2$,

cu atît mai mult avem : $(a+b)^4 \leqslant 8\,(a^4+b^4)$.

Observare. Semnul egal corespunde cazului cînd avem $a = b$.

340. Dacă notăm $x_1x_2x_3 \ldots x_n = X$, sistemul nostru devine : $\frac{X}{x_1^2} = a_1\,;\ \frac{X}{x_2^2} = a_2 \ldots ;\ \frac{X}{x_n^2} = a_n\,.$ (1)

Înmulţind, membru cu membru, ecuaţiile sistemului (1) deducem :

$$\frac{X^n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} = \frac{X^n}{X^2} = X^{n-2} = a_1a_2a_3 \ldots a_n,$$

de unde rezultă : $X = x_1x_2x_3 \ldots x_n = \sqrt[n-2]{a_1a_2a_3 \ldots a_n}\,.$ (2)

Împărţind membrii ecuaţiei (2), pe rînd, la membrii ecuaţiilor sistemului (1), aflăm :

$$x_1^2 = \frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2 \ldots a_n}}{a_1};\quad x_2^2 = \frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2 \ldots a_n}}{a_2};\quad \ldots\ldots\ x_n^2 = \frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2 \ldots a_n}}{a_n}$$

şi prin urmare :

$$x_1 = \sqrt[2n-4]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_1^{n-2}}}; \quad x_2 = \sqrt[2n-4]{\frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{a_2^{n-2}}}; \dots x_n = \sqrt[2n-4]{\frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{a_n^{n-2}}}.$$

341. Formăm identitatea lui Lagrange cu numerele : $(a_1, a_2 \dots a_m)$ şi $(x_1, x_2 \dots x_m)$.
Avem :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2)\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m)^2 + (a_1 x_2 - a_2 x_1)^2 + (a_1 x_3 - a_3 x_1)^2 + \dots + (a_{m-1} x_m - a_m x_{m-1})^2 \quad (1)$$

Dacă facem $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$, identitatea de mai sus devine :

$$m\,(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2) = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \dots + (a_{m-1} - a_m)^2. \quad (2)$$

Oricare paranteză la pătrat din membrul drept fiind un număr pozitiv rezultă că este mai mic sau cel mult egal în valoare cu membrul stîng.

Aşadar avem :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_m)^2 \leqslant m\,(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m),$$

ceea ce trebuia dovedit.

Observare. Semnul egal din inegalitatea dată corespunde cazului cînd toate expresiile $(a_1 - a_2)^2$; $(a_1 - a_3)^2 \dots (a_{m-1} - a_m)^2$ sînt nule, ceea ce se întîmplă cînd avem :

$$a_1 = a_2 = a_3 \dots = a_{m-1} = a_m.$$

342. Producţia în 1949 era de 5 000 tone. Producţia în 1950 este de $5\,000 + \frac{20}{100} \cdot 5\,000 = 5\,000 + \frac{1}{5} \cdot 5\,000 = \frac{6}{5} \cdot 5\,000$.

Deci producţia unui an este $\frac{6}{5}$ din producţia anului precedent. Rezultă că în x ani producţia totalizată va fi :

$$5\,000 + \frac{6}{5} \cdot 5\,000 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot 5\,000 + \dots + \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} \cdot 5\,000 = 50\,000.$$

Împărțind ambele părți ale ecuației cu 5 000 avem : $1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} = 10$. În prima parte a egalității avem o progresie geometrică cu primul termen 1 și rația $\frac{6}{5}$. Sumînd, avem :

$$\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^x - 1}{\frac{6}{5} - 1} = 10 \text{ sau } \left(\frac{6}{5}\right)^x = 3.$$ Logaritmînd obținem :

$$x \log \left(\frac{6}{5}\right) = \log 3, \text{ sau } x = \frac{\log 3}{\log 6 - \log 5} \approx 6 \text{ ani.}$$

343. a) Fie $\log_7 5 = x$ și $\log_{12} 5 = y$,

avem $5 = 7^x$ și $5 = 12^y$, adică $7^x = 12^y$. Aplicînd logaritmii în baza a ($a = 10$ de exemplu) avem $x \lg_a 7 = y \lg_a 12$ sau $\frac{x}{y} = \frac{\lg 12}{\lg 7} > 1$.

Deci $x > y$, adică $\lg_5 5 > \lg_{12} 5$.

b) Fie $\log_{\sqrt[9]{3}} = x$. De unde $9 = (\sqrt{3})^x$. Aplicînd logaritmii în baza a, de exemplu, avem : $2 \log_a^3 = x \cdot \frac{\log_a^3}{2}$ sau :

$$x = \frac{4 \log_a^3}{\log_a^3} = 4.$$

344. Avînd $a + b + c = 1$, rezultă că :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) = 1 + 1 + 1 +$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) =$$

$$= 3 + \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{a^2 + c^2}{ac} + \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

Cunoscînd că $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $a^2 + c^2 \geqslant 2ac$ şi $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, rezultă că avem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{a^2 + c^2}{ac} + \frac{b^2 + c^2}{bc} \geqslant 3 + 2 + 2 + 2 = 9,$$

adică:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

Observare. Semnul egal corespunde cazului cînd:

$$a = b = c.$$

345. Să calculăm raportul:

$$E = \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{abc} = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} =$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) +$$

$$+ \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + 6 = \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(c-a)^2}{ac} +$$

$$+ \frac{(b-c)^2}{bc} + 6.$$

Din rezultatul obţinut, se vede că $E \geqslant 6$ pentru că a, b, c sînt pozitive. Semnul egal corespunde cazului cînd $a = b = c$.

Rezultă din cele demonstrate pînă aci că avem deci:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geqslant 6abc.$$

346. Să notăm cu x_1 şi x_2 rădăcinile primului trinom, iar cu x_3 şi x_4 rădăcinile celui de al doilea.

Pe baza condiţiilor puse de problemă trebuie ca una din rădăcinile trinomului al doilea, să zicem x_3, să fie situată între rădăcinile primului trinom. Dacă $x_1 < x_2$ rezultă că rădăcinile x_1, x_2, x_3 înşiruite în ordinea lor de mărime trebuie să aibă aşezarea:

$$x_1,\ x_3,\ x_2. \qquad (1)$$

Pentru ca una din rădăcinile primului trinom să fie situată între rădăcinile celui de al doilea este necesar ca x_4 să se afle situat în aşezarea (1), la dreapta lui x_2 sau în stînga lui x_1. În oricare din aceste cazuri avem satisfăcute neegalităţile :

$$(x_3 - x_1)\ (x_3 - x_2) = x_3^2 - (x_1 + x_2)\ .x_3 + x_1x_2 < 0$$

şi :

$$(x_4 - x_1)\ (x_4 - x_2) = x_4^2 - (x_1 + x_2)\ x_4 + x_1x_2 > 0. \qquad (2)$$

Dacă înlocuim $x_1 + x_2 = -m$ şi $x_1x_2 = n$, neegalităţile (2) devin :

$$x_3^2 + mx_3 + n < 0$$

şi : (3)

$$x_4^2 + mx_4 + n > 0$$

sau :

$$(x_3^2 + mx_3 + n)\ (x_4^2 + mx_4 + n) < 0. \qquad (4)$$

Efectuînd produsul trinoamelor din (4) şi aşezînd termenii convenabil astfel încît să fie puse în evidenţă, $x_3 + x_4 = -p$ şi $x_3x_4 = q$, obţinem :

$$(x_3x_4)^2 + mx_3x_4\,(x_3 + x_4) + n\,[(x_3 + x_4)^2 - 2x_3\,x_4] + \\ + mn(x_3 + x_4) + m^2\,x_3x_4 + n^2 < 0,$$

sau : $q^2 - mpq + n\ (p^2 - 2q) - mnp + m^2q + n^2 < 0.$ (5)

Grupăm în (5), termenii astfel :

$$(n^2 - 2nq + q^2) + (m^2q - mpq) - (mnp - np^2) < 0,$$

după care neegalitatea devine :

$$(n - q)^2 + mq\,(m - p) - np\ (m - p) < 0,$$

sau :

$$(n - q)^2 + (m - p)\ (mq - np) < 0, \qquad (6)$$

care este condiţia cerută.

Reciproc, dacă avem îndeplinită condiţia (6), avem îndeplinite (5) şi (4), adică există relaţia :

$$(x_3^2 + mx_3 + n)\ (x_4^2 + mx_4 + n) < 0,$$

care implică următoarele situații:

I. $x_3^2 + mx_3 + n < 0$ și $x_4^2 + mx_4 + n > 0$.

Prima neegalitate ne arată că x_3 este situat între x_1 și x_2, iar a doua spune că x_4 este așezat în afara rădăcinilor x_1 și x_2. Cu alte cuvinte avem posibile următoarele așezări ale rădăcinilor:

$$x_1, x_3, x_2, x_4$$

sau:

$$x_4, x_1, x_3, x_2.$$

Într-un caz și în altul se vede că fiecare trinom are una din rădăcini situată între rădăcinile celuilalt trinom.

II. Dacă $x_3^2 + mx_3 + n > 0$ și $x_4^2 + mx_4 + n < 0$.

Avem posibilitățile:

$$x_1, x_4, x_2, x_3$$

sau:

$$x_3, x_1, x_4, x_2,$$

care ne conduc la aceleași concluzii ca și I.

347. Ecuația dată se poate pune sub forma:

$$\frac{m^2(b-x) + n^2(a-x) - (a-x)(b-x)}{(a-x)(b-x)} = \frac{f(x)}{(a-x)(b-x)} = 0.$$

Dacă oricare din rădăcinile numitorului nu este rădăcină pentru numărător atunci $f(x) = 0$ dă numărul maxim de rădăcini.

Să examinăm dacă a sau b rădăcini ale numitorului pot fi rădăcinile lui $f(x)$.

Calculăm $f(a) = m^2(b - a)$ și $f(b) = n^2(a - b)$ care nu pot fi nule pentru că avem prin ipoteză $m \neq 0$, $n \neq 0$ și $a \neq b$.

Observăm totodată că $f(a)$ și $f(b)$ sînt de semne contrarii, aceasta înseamnă că ecuația admite negreșit o rădăcină cuprinsă între a și b, rezultă deci că ecuația $f(x) = 0$ fiind de gradul al doilea cu coeficienții reali, va admite ambele rădăcini reale, cealaltă rădăcină este mai mică decît a sau mai mare decît b.

Observare. În cazul cînd $a = b$, ecuația dată devine

$$\frac{m^2 + n^2}{a - x} = 1,$$

a cărei singură rădăcină este $x = a - m^2 - n^2$.

348. Să notăm cu α și β rădăcinile primei ecuații, cu α și γ rădăcinile celei de a doua (α este rădăcina comună).

Avem :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -m, \\ \alpha + \gamma &= -p, \\ \alpha\beta &= n, \\ \alpha\gamma &= q. \end{aligned} \tag{1}$$

Din scăderea primelor două ecuații ale sistemului și din împărțirea ultimelor două obținem ecuațiile care ne dau β și γ :

$$\beta - \gamma = p - m \quad \text{și} \quad \frac{\beta}{n} = \frac{\gamma}{q}. \tag{2}$$

Soluția acestui sistem (2) este : $\beta = \frac{n(p-m)}{n-q}$ și $\gamma = \frac{q(p-m)}{n-q}$ care înlocuite în prima ecuație a sistemului (1) ne conduc la valoarea lui $\alpha = \frac{mq - np}{n-q}$.

Soluțiile obținute pentru α, β și γ trebuie să verifice una din ultimele două ecuații ale sistemului (1). Înlocuind expresiile lui α și β în ecuația a treia, obținem relația pe care trebuie s-o verifice coeficienții m, n, p și q :

$$\frac{mq - np}{n - q} \cdot \frac{n(p - m)}{n - q} = n,$$

sau

$$(n - q)^2 - (m - p)(np - mq) = 0,$$

ceea ce trebuia dovedit.

349. Un termen oarecare al sumei este $\frac{1}{a_{p-1} \cdot a_p}$.

Forma lui ne sugerează ca fiind o fracție care provine din diferența a două fracții cu numitorii a_{p-1} și a_p și cu numărătorii 1.

Avem :

$$\frac{1}{a_{p-1}} - \frac{1}{a_p} = \frac{a_p - a_{p-1}}{a_{p-1}\, a_p} = \frac{r}{a_{p-1}\, a_p}, \qquad (1)$$

unde r este raţia progresiei.

Din (1) deducem :

$$\frac{1}{a_{p-1}\, a_p} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{p-1}} - \frac{1}{a_p}\right). \qquad (2)$$

Descompunem apoi toţi termenii sumei date în problemă pe baza relaţiei (2) :

$$S = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right).$$

După reducerea termenilor asemenea, obţinem :

$$S = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1\, a_n} = \frac{(n-1)\, r}{r a_1\, a_n} = \frac{n-1}{a_1\, a_n}.$$

350. Să presupunem că există două polinoame, unul în x şi altul în y, al căror produs să fie identic cu $x^{200}\, y^{200} + 1$, fiecare din aceste polinoame ar trebui să fie de gradul 200 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{200}\, x^{200},$$

$$\varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_{200}\, y^{200}.$$

Efectuînd produsul lor, obţinem :

$$f \cdot \varphi = a_0 b_0 + a_0 b_1 y + a_0 b_2 y^2 + \ldots + a_0 b_{200} y^{200} + b_0 a_1 x +$$

$$+ b_0 a_2 x^2 + \ldots + b_0 a_{200} x^{200} + \ldots + a_{200}\, b_{200}\, x^{200}\, y^{200}.$$

Deoarece ni se cere ca $f \cdot \varphi \equiv x^{200}\, y^{200} + 1$, rezultă prin identificarea polinomului produs cu cel dat că trebuie să avem simultan (scriem numai unele egalităţi) :

$$a_0 b_0 = 1\,;\ a_{200}\, b_{200} = 1\,;\ a_0 b_{200} = 0\,;\ b_0 a_{200} = 0.$$

Din primele două egalităţi rezultă că nici unul din coeficienţii a_0, b_0, a_{200}, b_{200} nu poate fi nul, iar din ultimele două reiese că cel puţin doi din coeficienţii a_0, b_0, a_{200}, b_{200} sînt nuli, ceea ce este o imposibilitate.

Urmează că presupunerea că $x^{200}y^{200} + 1$ se poate desface în două polinoame $f(x)$, $\varphi(y)$ este absurdă.

351. Trecînd $\frac{1}{c}$ în membrul drept, obținem:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)},$$

care ne dă:

$$c(a+b)(a+b+c) + ab(a+b) = 0$$

sau:

$$(a+b)(ac+bc+c^2+ab) = 0.$$

De unde rezultă:

$$(a+b)[a(b+c)+c(b+c)] = 0,$$

sau $(a+b)(a+c)(b+c) = 0$, care implică:

$$a = -b, \text{ sau } a = -c, \text{ sau } b = -c,$$

ceea ce trebuia dovedit.

352. Să demonstrăm în general că:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < a_1 a_2 \ldots a_n,$$

unde $a_1, a_2 \ldots a_n$ sînt n numere întregi pozitive și diferite între ele.

Să presupunem că $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n$, atunci avem $a_1 \geqslant 1$; $a_2 \geqslant 2 \ldots a_{n-1} \geqslant n-1$ și prin urmare:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n \geqslant 1.2.3 \ldots (n-1) a_n. \qquad (1)$$

Pe de altă parte avem:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < a_n + a_n + \ldots a_n = n a_n \qquad (2)$$

și $1.2.3 \ldots (n-1) > 2(n-1) = (n-1) + (n-1) > n-1+1 = n$ (cînd $n \geqslant 4$).

Urmează, după (1) că:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \geqslant n a_n$$

și ținînd seama de (2), rezultă: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < a_1 a_2 \ldots a_n$ ceea ce trebuia dovedit.

Cazul dat în enunț se demonstrează la fel. Avînd: $a < b < c < d$ rezultă: $a + b + c + d < d + d + d + d = 4d$. De

asemeni, avem din $a \geqslant 1$; $b \geqslant 2$; $c \geqslant 3$; $d \geqslant 4$ că $abcd \geqslant 1.2.3\,d = 6d$. Rezultă deci că $a + b + c + d < abcd$.

Cînd avem dé-a face cu trei numere, există o excepție. Astfel, avem $1 + 2 + 3 = 1.2.3$. Pentru oricare alte numere care nu sînt toate egale în același timp, respectiv, cu 1; 2 și 3, avem $a + b + c < abc$. Demonstrația se face ca mai sus.

În cazul a două numere a și b, se observă că dacă $a = 1$ atunci $1 + b > 1.\ b$. Avem însă $a + b < ab$ pentru orice numere întregi și pozitive $1 < a < b$.

Într-adevăr, dacă $a > 1$, atunci a este cel puțin 2, iar ab este cel puțin $b + b$. Ori $a + b < b + b = 2b$, rezultă deci $a + b < ab$.

353. Pentru a demonstra neegalitatea, să calculăm diferența:

$$E = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2.$$

Avem:

$$E = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 - 2abxy - 2acxz - 2bcyz =$$

$$= (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2) +$$

$$+ (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) = (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2.$$

Avînd: $E = (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$, rezultă că $E \geqslant 0$ ceea ce demonstrează neegalitatea propusă.

Semnul egal corespunde cazului cînd avem simultan $ay - bx = 0$; $az - cx = 0$ și $bz - cy = 0$, adică atunci cînd:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

354. Să rezolvăm mai întîi ecuația în cazul general.

Notăm: $y = a - x$ și $z = x - b$, avem: $y + z = a - b$.

Ridicînd la pătrat ambii membri ai acestei ultime relații, obținem:

$$y^2 + z^2 = (a - b)^2 - 2yz.$$

Ridicînd din nou la pătrat, deducem:

$$y^4 + z^4 = (a - b)^4 + 4y^2z^2 - 4(a - b)^2 yz - 2y^2z^2. \qquad (1)$$

Avînd în vedere că prin ecuația dată se dă $y^4 + z^4$, ecuația (1) devine:

$$2(yz)^2 - 4(a - b)^2(yz) + (a - b)^4 - c = 0, \qquad (2)$$

sau :

$$yz = \frac{2(a-b)^2 \pm \sqrt{2(a-b)^4 + 2c}}{2},$$

adică :

$$(a-x)(x-b) = \frac{2(a-b)^2 \pm \sqrt{2(a-b)^4 + 2c}}{2}, \qquad (3)$$

care se desface în două ecuații de gradul al doilea ce se rezolvă prin formula obișnuită.

Ecuația cu coeficienți numerici este un caz particular al ecuației generale, unde $a = 5$, $b = 2$ și $c = 17$.

Introducînd aceste valori în (3), obținem :

$$(5-x)(x-2) = 9 \pm 7$$

sau :

$$(5-x)(x-2) = 16$$

și :

$$(5-x)(x-2) = 2,$$

cu rădăcinile :

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm i\sqrt{55}}{2}$$

și :

$$x_{3,4} = 3 \text{ și } 4.$$

355. Numerele a^2, b^2, c^2 fiind în progresie aritmetică avem :

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

sau :

$$(b-a)(b+a) = (c-b)(c+b).$$

De unde rezultă :

$$\frac{b-a}{c+b} = \frac{c-b}{b+a}. \qquad (1)$$

Împărțind ambii membri ai egalității (1) prin $(c+a)$, obținem :

$$\frac{b-a}{(c+a)(c+b)} = \frac{c-b}{(b+a)(c+a)}. \qquad (2)$$

Membrul stîng al egalității (2) reprezintă diferența $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{c+b}$, iar cel drept diferența $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$, rezultă deci:

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{c+b} = \frac{1}{b+a} - \frac{1}{c+a},$$

ceea ce demonstrează că numerele: $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ și $\frac{1}{a+b}$ sînt în progresie aritmetică.

356. Putem scrie S, astfel:

$$\begin{aligned} S = 1 &+ q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \\ &+ q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \\ &+ q^2 + \ldots + q^{n-1} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ q^{n-1}. \end{aligned}$$

Rîndurile din expresia lui S au respectiv sumele:

$$\frac{q^n-1}{q-1};\ \frac{q^n-q}{q-1};\ \frac{q^n-q^2}{q-1};\ \ldots\ldots\ \frac{q^n-q^{n-1}}{q-1}$$

și prin urmare:

$$S = \frac{nq^n - (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})}{q-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)\,q^n + 1}{(q-1)^2}.$$

357. Ținînd seama de formula $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ (unde am notat cu „log" simbolul logaritmilor în baza zece), sistemul dat devine:

$$\begin{aligned} \frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log y}{2\log 2} + \frac{\log z}{2\log 2} &= 2, \\ \frac{\log x}{2\log 3} + \frac{\log y}{\log 3} + \frac{\log z}{2\log 3} &= 2, \qquad (1) \\ \frac{\log x}{4\log 2} + \frac{\log y}{4\log 2} + \frac{\log z}{2\log 2} &= 2. \end{aligned}$$

Notînd $\log x = X$; $\log y = Y$ și $\log z = Z$, sistemul (1) devine după eliminarea numitorilor:

$$\begin{aligned} 2X + Y + Z &= 4 \log 2, \\ X + 2Y + Z &= 4 \log 3, \\ X + Y + 2Z &= 8 \log 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Adunînd ecuațiile membru cu membru și simplificînd cu 4 obținem ecuația:

$$X + Y + Z = \log 24. \tag{3}$$

Scăzînd membrii ecuației (3) pe rînd din membrii ecuațiilor sistemului (2), deducem:

$$X = \log \frac{2}{3}; \quad Y = 3 \log \frac{3}{2}; \quad Z = \log \frac{32}{3}$$

și apoi:

$$x = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{27}{8}; \quad z = \frac{32}{3}.$$

358. Avem:

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 5)^2}.$$

Dacă ținem seama că $\sqrt{E^2} = |E|$, rezultă cînd $\sqrt{x-1} \geqslant 5$,

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} - 5 = 2\sqrt{x-1} - 5,$$

iar cînd $\sqrt{x-1} \leqslant 5$, avem:

$$y = \sqrt{x-1} + 5 - \sqrt{x-1} = 5.$$

Deducem că y este constant cînd $x-1 \leqslant 25$, sau $x \leqslant 26$ și totodată cînd $x > 1$ pentru că radicalul trebuie să fie un număr real.

Așadar y este constant egal cu 5 cînd:

$$1 \leqslant x \leqslant 26.$$

Observare. Se poate ajunge la același rezultat folosind formula de transformare a radicalilor suprapuși de forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ în radicali simpli.

359. Să stabilim o formulă care leagă procentul de reducere a prețurilor cu $m\%$; procentul de ridicare a salariului cu $n\%$ și procentul de creștere a bunurilor cumpărate cu $p\%$.

Presupunem că muncitorul are un salariu lunar de S lei și că prețul unei unități dintr-o marfă este a lei.

La acel moment muncitorul își poate cumpăra cu salariul său :

$$\frac{S}{a} \text{ unități.}$$

După urcarea salariului muncitorul primește $S\left(1+\frac{n}{100}\right)$, iar prețul mărfii după reducere devine $a\left(1-\frac{m}{100}\right)$. Numărul de unități pe care le poate cumpăra muncitorul, este :

$$\frac{S\left(1+\frac{n}{100}\right)}{a\left(1-\frac{m}{100}\right)},$$

care acum este egal cu $\frac{S}{a}\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Avem deci relația :

$$\frac{S\left(1+\frac{n}{100}\right)}{a\left(1-\frac{m}{100}\right)} = \frac{S}{a}\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

sau :

$$m\,(p+100)+100\,n = 100\,p.$$

În cazul problemei $m = x$; $n = x$ și $p = 50$, de unde obținem ecuația :

$$150\,x + 100\,x = 5\,000$$

cu soluția :

$$x = \frac{5\,000}{250} = 20\%.$$

360. Fie a și b cele două numere date ($a > b$).

După datele problemei, avem:

$$a - \frac{b}{2} = 3\left(b - \frac{b}{2}\right). \qquad (1)$$

Pe baza acestor date ne revine să aflăm cît face $\frac{a}{b}$.

Din (1) rezultă:

$$\frac{a - \frac{b}{2}}{\frac{b}{2}} = 2\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 3$$

și prin urmare:

$$\frac{a}{b} = 2.$$

361. Împărțind $P(x)$ la $x - x_0$ avem:

$$P(x) = (x - x_0)\,[x^3 + (x_0 + a_1)\,x^2 + (x_0^2 + a_1x_0 + a_2)\,x + (x_0^3 + a_1x_0^2 + a_2x_0 + a_3)] + x_0^4 + a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4.$$

Avînd în vedere că: $x_0^4 + a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4 = 0$, rezultă

$$P(x) = (x - x_0)\,Q(x). \qquad (1)$$

Împărțind acum $Q(x)$ la $x - x_0$, avem:

$$Q(x) = x^3 + (x_0 + a_1)\,x^2 + (x_0^2 + a_1x_0 + a_2)\,x + (x_0^3 + a_1x_0^2 + a_2x_0 + a_3) = (x - x_0)\,[x^2 + (2x_0 + a_1)\,x + (3x_0^2 + 2a_1x_0 + a_2)] + 4x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3;$$

deoarece s-a dat: $4x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 = 0$, rezultă:

$$Q(x) = (x - x_0)\,[x^2 + (2x_0 + a_1)\,x + (3x_0^2 + 2a_1x_0 + a_2)]. \qquad (2)$$

Înlocuind în (1) expresia lui $Q(x)$ din (2), deducem:

$$P(x) = (x - x_0)^2\,[x^2 + (2x_0 + a_1)\,x\,(3x_0^2 + 2a_1x_0 + a_2)],$$

relație care dovedește că, date fiind condițiile din problemă, $P(x)$ se divide la $(x - x_0)^2$, iar cîtul împărțirii este:

$$x^2 + (2x_0 + a_1)\,x + (3x_0^2 + 2a_1x_0 + a_2).$$

362. Din identitatea cunoscută :

$$(1 - u)\ (1 + u + u^2 + \ldots\ u^{n-1}) = 1 - u^n$$

deducem :

$$\frac{1}{1-u} = \frac{1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1}}{1 - u^n}. \qquad (1)$$

Punînd $u = \sqrt[n]{a}$, egalitatea (1) devine :

$$\frac{1}{1 - \sqrt[n]{a}} = \frac{1 + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a^2} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{1 - a}.$$

Avem astfel fracţia dată transformată într-alta cu numitorul raţional.

363. Termenul de rangul k din prima progresie este $a_k = 1 + 4\,(k - 1) = 4k - 3$, iar termenul de rangul m din progresia a doua este $b_m = 4 + 11\ (m - 1) = 11\ m - 7$.

Termenii comuni celor două progresii corespund acelor valori m şi k pentru care avem :

$$11m - 7 = 4k - 3. \qquad (1)$$

Această ecuaţie trebuie rezolvată în numere întregi şi pozitive. Din (1) scoatem k :

$$k = 3m - 1 - \frac{m}{4},$$

pentru ca numărul k să fie întreg este necesar ca $m = 4p$.

Avem deci $k = 11p - 1$ şi $m = 4p$,
unde p poate fi orice întreg pozitiv.

Termenii comuni sînt deci :

$$a_{10} = b_4\,;\ a_{21} = b_8\,;\ a_{32} = b_{12} \text{ etc } \ldots$$

Doi termeni comuni consecutivi sînt deci :

$$b_{4p} \quad \text{şi} \quad b_{4(p+1)}$$

a căror diferenţă este :

$$b_{4p+4} - b_{4p} = (4p + 4 - 4p).\ 11 = 44.$$

Rezultă că termenii comuni formează o progresie aritmetică cu raţia 44.

364. Folosim formula care leagă doi termeni oarecare ai unei progresii geometrice :

$$a_k = a_i q^{k-i}, \text{ unde } q \text{ este raţia progresiei,}$$

avem astfel :

$$a_{m+n} = a_m q^n \qquad (1)$$

şi

$$a_m = a_{m-n} q^n.$$

Împărţind, membru cu membru, deducem :

$$\frac{a_{m+n}}{a_m} = \frac{a_m}{a_{m-n}}$$

de unde rezultă : $(a_m)^2 = AB$ sau : $a_m = \varepsilon \sqrt{AB} \cdot (\varepsilon = \pm 1)$.

Din egalitatea : $a_{m+n} = a_{m-n} q^{2n}$ scoatem : $q = \sqrt[2n]{\frac{B}{A}}$ pe care o înlocuim în egalitatea :

$$a_{m+n} = a_n q^m,$$

de unde rezultă :

$$a_n = a_{m+n} q^{-m} = A \sqrt[2n]{\left(\frac{B}{A}\right)^m} = A^{1-\frac{m}{2n}} \cdot B^{\frac{m}{2n}}.$$

365. Să considerăm o progresie aritmetică sau geometrică

$$a_1, a_2 \ldots a_n$$

şi trei termeni oarecare a_k, a_l, a_p care de asemeni sînt în progresie aritmetică sau geometrică ; să demonstrăm că în orice caz k, l şi p sînt în progresie aritmetică şi reciproc.

Cazul I, progresia este aritmetică de raţie r. În acest caz avem :

$$a_k = a_1 + (k-1)\, r\,;\; a_l = a_1 + (l-1)\, r \text{ şi } a_p = a_1 + (p-1) r.$$

Scriem că a_k, a_l şi a_p sînt în progresie aritmetică :

$$a_l - a_k = a_p - a_l.$$

Înlocuim în această ultimă relație pe a_k, a_l și a_p în funcție de rație, obținem :

$$a_1 + (l-1)\,r - a_1 - (k-1)\,r = a_1 + (p-1)r - a_1 - (l-1)\,r,$$

care după reduceri și simplificări, devine :

$$l - k = p - l,$$

ceea ce înseamnă că numerele k, l, p sînt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă între indicii a trei termeni în progresie aritmetică avem relația :

$$l - k = p - l$$

avem și :

$$[a_1 + (l-1)r] - [a_1 + (k-1)r] = [a_1 + (p-1)r] - [a_1 + (l-1)r],$$

ceea ce înseamnă că :

$$a_l - a_k = a_p - a_l,$$

adică :

a_k, a_l, a_p sînt în progresie aritmetică.

Cazul II, progresia este geometrică de rație q. În acest caz avem :

$$a_k = a_1 q^{k-1},\ a_l = a_1 q^{l-1} \text{ și : } a_p = a_1 q^{p-1}.$$

Scriem că a_k, a_l, a_p sînt în progresie geometrică :

$$\frac{a_l}{a_k} = \frac{a_p}{a_l},$$

sau $q^{l-k} = q^{p-l}$ de unde rezultă $l - k = p - l$, urmează deci că numerele k, l, p sînt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă între indicii a trei termeni în progresie geometrică avem relația $l - k = p - l$, atunci, a_k, a_l, a_p sînt în progresie geometrică. Într-adevăr, din relația $l - k = p - l$ deducem succesiv :

$$q^{l-k} = q^{p-l} \text{ sau : } \frac{a_1 q^{l-1}}{a_1 q^{k-1}} = \frac{a_1 q^{p-1}}{a_1 q^{l-1}}, \text{ adică avem : } \frac{a_l}{a_k} = \frac{a_p}{a_l},$$

ceea ce înseamnă că numerele

$$a_k,\ a_l,\ a_p$$

sînt în progresie geometrică.

366. Să stabilim o formulă mai generală pe baza căreia vom demonstra pe aceea propusă.

Dacă notăm S_p suma primilor p termeni ai unei progresii aritmetice în care a_1 este primul termen, a_p termenul de rangul p şi r raţia, avem :

$$S_p = \frac{(a_1 + a_p)p}{2},$$

de asemenea, avem :

$$S_q = \frac{(a_1 + a_q)q}{2},$$

de unde rezultă :

$$\frac{S_p}{p} - \frac{S_q}{q} = \frac{a_p - a_q}{2} = \frac{(p-q)r}{2}. \qquad (1)$$

Dacă luăm o dată $p = 3m$ şi $q = 2m$ şi apoi $p = 2m$ şi $q = m$ pe care îi înlocuim în (1), obţinem egalităţile :

$$\frac{S_{3m}}{3m} - \frac{S_{2m}}{2m} = \frac{mr}{2}$$

şi :

$$\frac{S_{2m}}{2m} - \frac{S_m}{m} = \frac{mr}{2}.$$

De unde rezultă succesiv :

$$\frac{S_{3m}}{3m} - \frac{S_{2m}}{2m} = \frac{S_{2m}}{2m} - \frac{S_m}{m},$$

$$2S_{3m} - 3S_{2m} = 3S_{2m} - 6S_m$$

şi în sfîrşit :

$$S_{3m} = 3\ (S_{2m} - S_m).$$

367. Ne bazăm pe formula $\log_a^b = \frac{\log b}{\log a}$, unde „log" înseamnă logaritmii în baza zece.

Înlocuind în membrul drept toţi logaritmii exprimaţi ca mai sus, avem :

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c \cdot N = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log N}{\log c} = \frac{\log N}{\log a} = \log_a N,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

368. Aplicăm în ambii membri logaritmii în baza a, după care obţinem :

$$\log E = \frac{\log (\log b)}{\log b} \cdot \log b = \log (\log b),$$

de unde rezultă

$$E = \log_a b.$$

369. Aplicînd logaritmi, obţinem :

$$\sqrt{x} \log x = x \log \sqrt{x} = \frac{x \log x}{2}$$

sau :

$$2\sqrt{x} \log x - x \log x = 0,$$

care se desface în două ecuaţii :

$\log x = 0$ şi $2\sqrt{x} = x$ ale căror rădăcini sînt :

$$x_1 = 1 ; \quad x_2 = 0 \quad \text{şi} \quad x_3 = 4.$$

Rădăcina $x = 0$ e fără sens, cele care verifică ecuaţia dată sînt numai $x = 1$ şi $x = 4$.

370. Sistemul se rezolvă prin metoda substituţiei. Scoatem y din prima ecuaţie $y = \frac{a^2}{x}$ şi îl introducem în ecuaţia a doua :

$$\lg^2 x + (\lg a^2 - \lg x)^2 = \frac{5}{2} \lg a^2. \qquad (1)$$

Notînd $z = \log x$ şi $b = \log a^2$, ecuaţia (1) devine :

$$z^2 + (b - z)^2 = \frac{5b}{2},$$

ale cărei rădăcini sînt :

$$\log x_{1,2} = z_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{5b - b^2}}{2},$$

de unde rezultă :

$$x_{1,2} = 10^{\frac{b \pm \sqrt{5b - b^2}}{2}}, \text{ iar } y_{1,2} = a^2 x^{-1} = a^2 \cdot 10^{\frac{b \pm \sqrt{5b - b^2}}{2}},$$

unde b se înlocuieşte $\log a^2$.

Pentru ca soluţiile să fie reale este necesar doar ca :

$$5b - b^2 \geqslant 0,$$

ceea ce are loc cînd : $0 \leqslant b \leqslant 5$,
sau cînd :

$$0 \leqslant \log a^2 \leqslant 5$$

care dă :

$$0 \leqslant |a| \leqslant 100\sqrt{10}.$$

371. Fiecare termen al sumei este o fracţie de forma :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Această fracţie se descompune într-o diferenţă de două fracţii cu numitorii : $n(n+1)$ şi $(n+1)(n+2)$ astfel :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Pe baza acestei formule, suma S se poate scrie astfel :

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \ldots - \frac{1}{98.99} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100}\right].$$

Efectuînd reducerile, obţinem :

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{99.100}\right) = \frac{4949}{2.99.100} = \frac{4949}{19\,800}.$$

372. Să demonstrăm această neegalitate prin metoda inducției complete. Se verifică cu ușurință că neegalitatea este adevărată pentru $n = 2; 3$; să presupunem că ea este adevărată pentru $n = k$, adică avem:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \qquad (1)$$

și să deducem că ea este adevărată pentru $n = k + 1$.

Adunăm la ambii membri ai neegalității (1) pe $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, obținem:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \qquad (2)$$

Să observăm că: $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$. (3)

Într-adevăr, dacă eliminăm numitorul neegalității (3) avem:

$$\sqrt{k(k+1)} + 1 > (k+1),$$

sau:

$\sqrt{k(k+1)} > k$, ceea ce este adevărat, pentru că avem:

$$k(k+1) > k^2.$$

Rezultă deci că, dată fiind justețea neegalității (3), avem cu atît mai mult:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Neegalitatea dată fiind adevărată pentru $n = k + 1$, atunci cînd este adevărată pentru $n = k$, rezultă că deoarece am verificat justețea pentru $n = 2; 3$, ea va fi justă și pentru $n = 4$, fiind adevărată pentru $n = 4$ va fi și pentru $n = 5$ ș.a.m.d.

Observare. Pentru $n = 1$ avem egalitatea $1 = \sqrt{1}$.

373. Dacă notăm $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100} = A$ și adunăm neegalitățile, membru cu membru, obținem:

$$A - 3A + 2A \text{ care este nulă.}$$

Pentru că expresiile din membrul stîng ale neegalităților sînt numere pozitive sau nule și a căror sumă este nulă, rezultă că fiecare expresie trebuie să fie nulă.

Avem deci:

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0 \text{ sau } a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3).$$

La fel avem: $a_2 - a_3 = 2(a_3 - a_4)$; $a_3 - a_4 = 2(a_4 - a_5) \ldots$ $\ldots a_{100} - a_1 = 2(a_1 - a_2)$.

Înmulțind egalitățile obținute, membru cu membru, deducem: $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)\ldots(a_{100} - a_1) = 2^{100}(a_1 - a_2).(a_2 - a_3)\ldots(a_{100} - a_1)$,
sau: $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)\ldots(a_{100} - a_1) = 0$, egalitate posibilă dacă cel puțin un factor este nul. Să presupunem: $a_1 - a_2 = 0$, atunci rezultă: $a_2 - a_3 = 0$, apoi $a_3 - a_4 = 0$ etc ... adică avem

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{100},$$

ceea ce trebuia dovedit.

374. Cele două progresii au termenii de forma:

$$x;\ x + y;\ x + 2y;\ x + 3y,$$

$$z;\ zu;\ zu^2;\ zu^3.$$

Pe baza datelor problemei formăm sistemul:

$$\begin{aligned} x + z &= 18, \\ x + y + zu &= 18, \\ x + 2y + zu^2 &= 26, \\ x + 3y + zu^3 &= 58. \end{aligned} \qquad (1)$$

Scăzînd ecuația I din a II-a, a II-a din a III-a etc.... obținem sistemul cu x eliminat:

$$\begin{aligned} y + z(u - 1) &= 0, \\ y + zu(u - 1) &= 8, \\ y + zu^2(u - 1) &= 32. \end{aligned} \qquad (2)$$

Scăzînd din nou I din a II-a, a II-a din a III-a obținem:

$$z = (u-1)^2 = 8,$$

$$zu(u-1)^2 = 24.$$

Prin împărțirea ecuației a II-a la I deducem soluția $u = 3$ și apoi $z = 2$; $x = 16$; $y = -4$, iar cele două progresii căutate sînt:

$$16;\ 12;\ 8;\ 4$$

$$2;\ 6;\ 18;\ 54.$$

Alte soluții sînt imaginare.

375. Împărțind ambii membri ai ecuației cu 4^x, obținem:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \left(\frac{6}{4}\right)^x + 1 \text{ sau: } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1.$$

Notăm: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = (1{,}5)^2 = z$, deducem ecuația care dă pe z:

$$z^2 - z - 1 = 0$$

cu soluțiile: $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dintre care numai: $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conduce la o soluție reală pentru x:

$$(1{,}5)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180$$

de unde rezultă:

$$x \approx \frac{\log 1{,}618}{\log 1{,}5} \approx \frac{0{,}20898}{0{,}17609} \approx 1{,}18.$$

376. a) Pe baza definiției logaritmilor avem succesiv:

$$\log_x 16 = 4^2 = 16$$

și deci:

$$x^{16} = 16,$$

de unde rezultă:

$$x = \sqrt[16]{16} = \sqrt[16]{2^4} = \sqrt[4]{2}.$$

b) Prima ecuație se mai poate scrie astfel:

$$(x+1)^2 + y^2 = 10.$$

Introducem în ea pe $y = \frac{3}{x+1}$ scos din ecuația a doua. Obținem ecuația care ne dă x:

$$(x+1)^4 - 10(x+1)^2 + 9 = 0.$$

Deducem: $x + 1 = \pm 1$ și $x + 1 = \pm 3$.

Avem deci:

$$x_1 = -4;\ x_2 = -2;\ x_3 = 0 \text{ și } x_4 = 2,$$

cărora le corespund:

$$y_1 = -1;\ y_2 = -3;\ y_3 = 3 \text{ și } y_4 = 1.$$

Soluțiile sistemului sînt deci:

$(x_1 = -4;\ y_1 = -1)$, $(x_2 = -2;\ y_2 = -3)$, $(x_3 = 0,\ y_3 = 3)$ și $(x_4 = 2;\ y_4 = 1)$.

377. Pentru a dovedi că în condițiile date cele trei expresii: $b^2 + bc + c^2$; $c^2 + ac + a^2$ și $a^2 + ab + b^2$ formează o progresie aritmetică, vom arăta că diferența a doi termeni consecutivi este constantă, adică avem:

$$(c^2+ac+a^2)-(b^2+bc+c^2)=(a^2+ab+b^2)-(c^2+ac+a^2). \quad (1)$$

Într-adevăr, membrul stîng este egal cu:

$$c(a-b) + a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b+c),$$

iar cel drept are expresia:

$$b^2 - c^2 + a\,(b-c) = (b-c)\,(a+b+c).$$

Dat fiind că a, b, c sînt în progresie aritmetică, rezultă că avem $a - b = b - c$ și prin urmare cele două diferențe de mai sus (1) sînt și ele egale, ceea ce justifică afirmația din enunț.

378. Fie a_i termenul de rang i din prima progresie care este egal cu termenul b_k de rang k din a doua progresie. Avem:

$$a_i = 2 + (i-1)5 \text{ și } b_k = 2 + (k-1)3.$$

Condiția impusă pentru acești termeni ne conduce la ecuația :

$$2 + (i - 1)5 = 2 + (k - 1)3,$$

sau :

$$5i - 3k = 2. \qquad (1)$$

Deoarece numerele i și k sînt întregi și pozitive, rezultă că trebuie să aflăm acele soluții ale ecuației (1) care satisfac aceste condiții.

Din (1) deducem :

$$k = \frac{5i - 2}{3} = \frac{6i - i - 3 + 1}{3} = 2i - 1 - \frac{i - 1}{3}. \qquad (2)$$

Pentru ca numărul k să fie întreg este necesar ca $i - 1$ să fie un multiplu de 3. Avem deci $i - 1 = 3m$,

$$\text{sau } i = 1 + 3m.$$

Înlocuind această expresie în (2) obținem : $k = 5m + 1$.

Deoarece i și k trebuie să fie unul din numerele de la 1 la 121, rezultă că trebuie să avem satisfăcute simultan inegalitățile $1 \leqslant 1 + 3m \leqslant 121$ și $1 \leqslant 1 + 5m \leqslant 121$, care ne conduc la alte două echivalente respectiv cu primele :

$$0 \leqslant m \leqslant 40 \text{ și } 0 \leqslant m \leqslant 24$$

ceea ce înseamnă că cele două progresii au 25 termeni identici.

379. Dacă notăm $x = \log 2$ și $y = \log 5$, ambii logaritmi fiind în baza 10 și ținem seamă că $\log (2.5) = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$, avem de rezolvat următorul sistem :

$$x + y = 1,$$
$$xy = 0{,}2104,$$

ale cărui soluții sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea :

$$z^2 - z + 0{,}2104 = 0.$$

Rezolvînd, aflăm :

$$z_1 = x = \frac{1 - \sqrt{0{,}1584}}{2} \approx 0{,}3010,$$

$$z_2 = y = \frac{1 + \sqrt{1{,}8416}}{2} \approx 0{,}6990.$$

380. Notăm numerele necunoscute cu x și y, ecuația problemei este :

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 450. \qquad (1)$$

Având în vedere că numerele căutate trebuie să fie întregi, rezultă că x este un multiplu de y, adică $x = my$.

Înlocuim în (1) și obținem :

$$2my + my^2 + m = 450,$$

sau :

$$m.(y + 1)^2 = 450. \qquad (2)$$

Căutăm o descompunere în factori a lui 450 de forma membrului stîng din ecuația (2). Avem $450 = 2.3^2.5^2$, care se poate scrie în următoarele feluri :

$$450 = 2.15^2 = 18.5^2 = 50.3^2,$$

cărora le corespund următoarele soluții :

1) $m = 2$, $y = 14$ și $x = 28$

2) $m = 18$, $y = 4$ și $x = 72$

3) $m = 50$, $y = 2$ și $x = 100$.

381. Ținînd seama că $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$, ecuația dată devine :

$$\frac{\log x}{\log 3} + \frac{\log 3}{\log x} - 2 \cdot \frac{\log x}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log x} = 1.$$

Notăm : $\frac{\log x}{\log 3} = y$ și înlocuim în ultima ecuație, obținem :

$y + \frac{1}{y} - 2 = 1$ care ne dă $y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, de unde rezultă :

$$\log x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \log 3 \approx \frac{3 \pm 2{,}23607}{2} \cdot 0{,}47712$$

$$\log x_1 \approx 2{,}61803.0{,}47712 \approx 1{,}24911,$$

$$\log x_2 \approx 0{,}38196.0{,}47712 \approx 0{,}18224$$

și apoi :

$$x_1 \approx 17{,}74,$$

$$x_2 \approx 1{,}521.$$

382. Efectuînd împărţirea celor două polinoame, obţinem cîtul : $x^2 - ax + (a^2 - b + p)$ şi restul : $a(2b - a^2 - p)\,x + q - b(a^2 - b + p)$.

Pentru ca împărţirea să se facă exact, rezultă deci că trebuie să avem :

$$a(2b - a^2 - p) = 0 \text{ şi } q - b(a^2 - b + p) = 0$$

ceea ce dă :

$$a = 0 \text{ şi } q = b(p - b),$$

sau soluţia :

$$p = 2b - a^2 \text{ şi } q = b^2.$$

Metoda II. La acelaşi rezultat ajungem dacă folosim metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Cîtul celor două polinoame va fi un trinom de gradul al doilea cu coeficienţi nedeterminaţi m şi n, iar restul nul :

$$x^4 + px^2 + q \equiv (x^2 + ax + b)\,(x^2 + mx + n).$$

Din această identitate rezultă :

$$a + m = 0\,;\quad am + b + n = p\,;\quad an + bm = 0 \text{ şi } bn = q,$$

apoi :

$$m = -a \text{ şi } a(n - b) = 0.$$

Dacă punem : $a = 0$ găsim : $m = 0\,;\ p = b + n$ şi : $q = bn$.

În cazul : $a \neq 0$, avem :

$$n = b\,;\ m = -a\,;\ p = 2b - a^2 \text{ şi } q = b^2.$$

383. Calculăm suma pătratelor rădăcinilor x_1 şi x_2 din relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi :

$$x_1 + x_2 = 2 - m \text{ şi } x_1x_2 = -(m + 3).$$

Avem :

$$E = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2 - m)^2 + 2(m + 3).$$

De unde rezultă :

$$E = 9 + (m - 1)^2.$$

Expresia E va avea valoarea minimă cînd îi vom adăuga lui 9 cea mai mică valoare, adică zero.

Înseamnă deci că expresia E este minimă, atunci cînd avem : $(m-1)^2 = 0$, adică : $m = 1$.

384. Dat fiind că a, b, c sînt rădăcini, înseamnă că polinomul se împarte exact prin $x-a$, $x-b$ şi $x-c$. Trebuie să avem deci identitatea :

$$x^3 - ax^2 + bx - c \equiv (x-a)(x-b)(x-c).$$

Efectuînd produsul din membrul drept şi scriind că coeficienţii aceloraşi puteri sînt egali, avem :

$$a+b+c = a\,;\ ab+ac+bc = b \text{ şi : } abc = c$$

sau :

$$b+c = 0\,;\ bc = b \text{ şi } abc = c,$$

care se desface în două sisteme :

$$(1)\ \begin{cases} b+c=0 \\ b=0 \\ abc=c \end{cases} \qquad \text{şi :}\ 2)\ \begin{cases} b+c=0 \\ c=1 \\ abc=c \end{cases}$$

Primul dă soluţia a orice număr : $b = 0$ şi $c = 0$, iar ecuaţia devine $x^3 - ax^2 = 0$ cu rădăcinile :

$$0\,;\ 0 \text{ şi } a.$$

Al doilea sistem ne dă soluţia : $a = -1\,;\ b = -1\,;\ c = 1$ căreia îi corespunde ecuaţia : $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ cu rădăcinile : $-1\,;\ -1\,;\ 1$.

385. Adunăm la ambii membri ai ecuaţiei a doua pe cei ai ecuaţiei I multiplicaţi cu 3 ; obţinem :

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 35 + 3.30,$$

sau :

$$(x+y)^3 = 125.$$

Ne mărginim la soluţiile reale luînd : $x + y = 5$.

Înlocuim : $x + y = 5$ în ecuaţia I de unde obţinem :

$$xy = 6.$$

Soluţile reale ale sistemului sînt : $(x = 3 ; y = 2)$ şi

$$(x = 2 ; y = 3).$$

386. Numărul complex $a + bi$ avînd modulul egal cu unitatea şi $b \neq 0$ se poate pune sub forma $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$. Avem deci :

$$a + ib = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2\alpha} + i \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + 2i \operatorname{tg}\alpha}{(1+i \operatorname{tg}\alpha)(1-i \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{(1 + i \operatorname{tg}\alpha)^2}{(1+i \operatorname{tg}\alpha)(1-i \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{1 + i \operatorname{tg}\alpha}{1 - i \operatorname{tg}\alpha},$$

sau :

$$a + ib = \frac{\cot\alpha + i}{\cot\alpha - i}$$ ceea ce dovedeşte afirmaţia din problemă.

387. Considerăm două cazuri, după cum n este par sau impar.

1) Numărul n este par $(n = 2k)$. Înmulţind egalităţile membru cu membru, prima cu a treia, cu a cincea etc... şi apoi a doua cu a patra, a şasea etc...., obţinem ecuaţiile :

$$x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{2k} = 1.3.5 \ldots (2k - 1)$$

şi :

$$x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{2k} = 2.4.6 \ldots . 2k,$$

care ne arată că sistemul este în acest caz imposibil, pentru că :

$$1.3.5 \ldots . (2k - 1) < 2.4.6 \ldots . 2k.$$

2) Numărul n este impar $(n = 2k + 1)$. Înmulţind egalităţile membru cu membru, obţinem :

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{2k+1})^2 = 1.2.3 \ldots (2k + 1)$$

şi prin urmare $x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{2k+1} = \varepsilon \sqrt{1.2.3 \ldots . (2k+1)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

Apoi înmulţim egalităţile I cu a III-a cu a V-a etc... obţinem :

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2k+1}\, x_1 = 1.3.5 \ldots (2k + 1).$$

De unde rezultă, ținînd seama de egalitatea precedentă :

$$x_1 = \frac{1.3.5\ldots(2k+1)}{\varepsilon\sqrt{1.2.3.4\ldots(2k+1)}}$$

și deci :

$$x_2 = \frac{1}{x_1}; \; x_3 = \frac{2}{x_2}; \; x_4 = \frac{2}{x_3} \text{ etc. } \ldots \; x_{2k+1} = \frac{2k}{x_{2k}}.$$

388. Avînd în vedere faptul că ecuația admite o rădăcină reală cuprinsă între 0 și 1 rezultă că discriminantul este pozitiv ; de asemenea este necesar ca rezultatele înlocuirilor lui x cu 0 și 1 trebuie să fie de semne contrarii.

$$\Delta = (m-4)^2 - 4\,m(3m-11) = -11\;m^2 + 36\,m + 16 \geqslant 0,$$

$$f(0).f(1) = (3m-11)\;(3m-7) < 0.$$

Din prima neegalitate deducem :

$$\frac{18-10\sqrt{5}}{11} \leqslant m \leqslant \frac{18+10\sqrt{5}}{11}.$$

Din cea de a doua, rezultă : $\frac{7}{3} < m < \frac{11}{3}$.

O valoare întreagă care satisface simultan ambele neegalități duble nu este decît $m = 3$.

Pentru această valoare a lui m ecuația devine : $3x^2 + x - 2 = 0$, ale cărei rădăcini sînt :

$$x_1 = -1 \text{ și } x_2 = \frac{2}{3}.$$

389. Dacă considerăm trinomul de gradul al doilea

$$f(x) = (x-a)\;(x-c) + 2(x-b)\;(x-d)$$

și calculăm :

$$f(a) = 2(a-b)\;(a-d) \text{ și } f(c) = 2(c-b)\,(c-d),$$

observăm că dat fiind $a < b$ și $a < d$ avem $f(a) < 0$, și pentru că $c < b$, iar $c < d$ avem $f(c) < 0$.

Rezultă de aci că trinomul are o rădăcină reală cuprinsă între a şi c $(a < x_1 < c)$.

De asemenea, dacă calculăm $f(b)$ şi $f(d)$, aflăm :

$$f(b) = (b - a)\ (b - c) < 0$$

şi : $f(d) = (d - a)(d - c) > 0,$

de unde rezultă că există o rădăcină reală cuprinsă între b şi d :

$$(b < x_2 < d).$$

Observare. La aceeaşi concluzie ca mai sus ajungem dacă în locul ecuaţiei considerate ne îndreptăm atenţia asupra ecuaţiei :

$$(x - a)(x - c) + m(x - b)(x - d) = 0,$$

unde m este un coeficient oarecare. Demonstraţia urmează aceeaşi cale ca mai sus.

390. Notăm membrul stîng al egalităţii cu $E_n(x)$.

Avem de rezolvat ecuaţia :

$$E_n(x) = 0.$$

Se observă că ecuaţia $E_1(x) = 0$ are rădăcina 1 ; $E_2(x) = 0$ admite rădăcinile 1 şi 2. Să arătăm că ecuaţia : $E_n(x) = 0$ are rădăcinile 1 ; 2 ; 3 ... ; n.

Pentru demonstraţie, folosim metoda inducţiei complete.

Să demonstrăm că dacă $E_n(x) = 0$ are rădăcinile 1 ; 2 ; ... n atunci $E_{n+1}(x) = 0$ are rădăcinile 1 ; 2 ; 3 ... n ; $n + 1$.

Avem :

$$E_{n+1}(x) - E_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x\ (x-1) \ldots (x-n)}{(n+1)!}. \qquad (1)$$

Deoarece membrul drept este nul pentru valorile $x = 1$; 2 ... n ca şi $E_n(x)$, după cum s-a presupus mai sus, rezultă că şi $E_{n+1}(x)$ se anulează pentru $x = 1$; 2 ; 3 ... n. Să arătăm că $E_{n+1}(x)$ se mai anulează şi pentru $n + 1$.

Avem :

$$E_{n+1}(n + 1) = E_n(n + 1) + (-1)^{n+1} \text{ şi}$$

$$E_n(n + 1) = 1 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 \ldots + (-1)^n C_{n+1}^n$$

(unde C_{n+1}^1, C_{n+1}^2 ... C_{n+1}^n, C_{n+1}^{n+1} ... sînt coeficienţii binomiali) între care există relaţia :

$$1 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 \ldots + (-1)^n C_{n+1}^n + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} = 0.$$

Urmează deci că: $E_n(n+1) = -(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} = 0$, ceea ce demonstrează că $n+1$ este şi ea rădăcină pentru $E_{n+1}(x) = 0$. Am observat că $E_1(x) = 0$ are rădăcina 1; deci pe baza teoremei de inducţie de la n la $n+1$, $E_2(x)$ are rădăcinile 1 şi 2; apoi $E_3(x) = 0$ are rădăcinile 1; 2; 3 etc. şi $E_n(x) = 0$ are rădăcinile 1; 2; 3 ... n.

391. Vom demonstra aceasta prin inducţie completă. Observăm că pentru $n = 1$ şi $n = 2$ relaţia este adevărată căci:

$$(\sqrt{2}-1)^1 = \sqrt{2} - \sqrt{2-1} \text{ şi } (\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{9} - \sqrt{9-1}.$$

Să presupunem relaţia adevărată pentru n un număr natural oarecare şi să deducem că ea este adevărată şi pentru $n+1$.

Din relaţia presupusă adevărată:

$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$, unde n şi m sînt numere naturale, deducem:

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})(\sqrt{2}-1),$$

sau:

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (\sqrt{2m} + \sqrt{m-1}) - (\sqrt{2m} - 2 + \sqrt{m}),$$

care se mai poate scrie şi astfel:

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = \sqrt{(\sqrt{2m} + \sqrt{m-1})^2} - \sqrt{[\sqrt{2(m-1)} + \sqrt{m}]^2}. \quad (1)$$

Vom demonstra că pătratele parantezelor de sub radicali sînt două numere naturale consecutive, presupunînd că pentru n avem relaţia $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ (n şi m numere naturale).

Într-adevăr, avem:

$$(\sqrt{2m} + \sqrt{m-1})^2 - [\sqrt{2(m-1)} + \sqrt{m}]^2 = 2m + m - 1 + 2\sqrt{2m(m-1)} - 2(m-1) - m - 2\sqrt{2m(m-1)} = 1.$$

Ne mai rămîne să demonstrăm că pătratul uneia din paranteze este număr natural.

Calculăm:

$$(\sqrt{2m} + \sqrt{m-1})^2 = 2m + m - 1 + 2\sqrt{2m(m-1)} = 3m - 1 + 2\sqrt{2m(m-1)}.$$

Ca să ne atingem scopul urmărit trebuie să dovedim că $2m(m-1)$ este un pătrat perfect.

Pornind de la relația presupusă adevărată:

$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ (unde n și m numere naturale) vom deduce că $2m(m-1)$ este pătrat perfect.

Dacă dezvoltăm $(\sqrt{2}-1)^n$ pentru orice n, aflăm că expresia dezvoltării este de forma $a + b\sqrt{2}$, unde a și b sînt numere întregi. La această concluzie se ajunge de îndată ce dezvoltăm puterea după formula binomului lui Newton sau din aproape în aproape, înmulțind fiecare putere obținută prin $\sqrt{2}-1$.

Așa fiind, avem:

$$\sqrt{m} - \sqrt{m-1} = a + b\sqrt{2} \quad (m,\ a,\ b \text{ numere întregi}).$$

Ridicînd ambii membri la pătrat, aflăm:

$$2m - 1 - 2\sqrt{m(m-1)} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2},$$

de unde rezultă: $-2\sqrt{m(m-1)} = 2ab\sqrt{2}$

și prin urmare: $2m(m-1) = (2ab)^2$.

Din cele arătate pînă aci rezultă deci că dacă formula este adevărată pentru n ea este adevărată și pentru $n+1$.

Formula fiind justă pentru $n=1$ și $n=2$ este deci justă și pentru $n=3$ ș.a.m.d., ceea ce confirmă adevărul din enunț.

392. În demonstrarea neegalității ne sprijinim pe inegalitatea

$$2^m > m+1 \quad \text{unde } m > 1. \tag{1}$$

Această neegalitate este adevărată pentru $m=2$, să presupunem că ea este adevărată pentru m, vom demonstra în acest caz că este adevărată și pentru $m+1$.

Într-adevăr, dacă înmulțim ambii membri ai neegalității cu factorul 2 avem:

$$2^{m+1} > 2m+2 > (m+1)+1 \tag{1}$$

ceea ce justifică afirmația noastră. Deoarece neegalitatea este adevărată pentru $m=2$, ea va fi adevărată și pentru $m=3$ etc.

Acum să demonstrăm neegalitatea propusă.

Putem scrie:

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \ldots 2^{n-1}$$

şi deoarece avem

$$2^2 > 3\,;\ 2^3 > 4\,;\ \ldots\ 2^{n-1} > n,$$

rezultă, înmulţind membru cu membru, că vom avea:

$$2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \ldots 2^{n-1} > 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots \ldots n$$

şi prin urmare: $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \ldots 2^{n-1} > 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!$, adică:

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!,$$

ceea ce trebuia dovedit.

393. Să examinăm, în condiţiile date, semnul expresiei:

$$E = (a + b + c + d)^2 - 8\,(ac + bd). \qquad (1)$$

Pentru aceasta să notăm: $b - a = m$, $c - b = n$ şi: $d - c = p$.

Numerele: m, n şi p sînt pozitive pentru că avem prin ipoteză:

$$b > a\,;\ c > b \quad \text{şi } d > c.$$

Din notaţiile făcute rezultă:

$$b = a + m\,;\ c = a + m + n \quad \text{şi: } d = a + m + n + p.$$

Înlocuind valorile lui b, c şi d în (1) avem:

$$E = [4a + (3m + 2n + p)]^2 - 8\,[a(a + m + n) + (a + m)(a + m + n + p)] = 16a^2 + 8a\,(3m + 2n + p) + (3m + 2n + p)^2 - 8a^2 - 8a\,(m + n) - 8a^2 - 8a\,(2m + n + p) - 8m\,(m + n + p) = (3m + 2n + p)^2 - 8m\,(m + n + p) = m^2 + 4n^2 + p^2 + 4mn - 2mp + 4np.$$

Grupînd convenabil, aflăm:

$$E = (m^2 - 2mp + p^2) + 4n^2 + 4mn + 4np = (m - p)^2 + 4n^2 + 4mn + 4np.$$

Avînd în vedere că toate numerele m, n şi p sînt pozitive, rezultă $E > 0$ şi prin urmare :

$$(a + b + c + d)^2 > 8\,(ac + bd).$$

394. Notăm cu E expresia de calculat : $E = x^3 + y^3 + z^3$, cu : $u = xy + xz + yz$ şi $v = xyz$. Deducem : $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = xy\,(x + y) + xz\,(x + z) + yz\,(y + z) = xy\,(a\text{-}z) + xz\,(a\text{-}y) + yz\,(a\text{-}x) = a\,(xy + xz + yz) - 3xyz = au - 3v$.
(În decursul operaţiilor am înlocuit $x + y = a\text{-}z$ pentru că ni se dă $x + y + z = a$ etc...).

Din înmulţirea, membru cu membru, a primelor două relaţii date obţinem :

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = ab^2,$$

sau ţinînd seama de notaţiile de mai sus, avem :

$$E + au - 3v = ab^2. \qquad (1)$$

Din ridicarea la cub a primei relaţii, deducem :

$$x^3 + x^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz = a^3,$$

sau :

$$E + 3au - 3v = a^3. \qquad (2)$$

După eliminarea numitorilor din a treia relaţie dată, obţinem :

$$(xy + xz + yz) = xyz,$$

sau :

$$v = cu. \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) deducem : $u = \frac{a^3 - E}{3\,(a - c)}$ pe care o înlocuim în (1) împreună cu : $v = cu$; rezultă o ecuaţie de gradul 1 în E care ne dă :

$$E = \frac{1}{2}\,(3ab^2 - 3b^2c + 3a^2c - a^3).$$

395. Fiecare fracție din sumă este de forma $\frac{3}{n(n+3)}$ iar aceasta este egală cu $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$. Așa fiind, suma dată se descompune într-o sumă de fracții mai simple:

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{94} - \frac{1}{97} + \frac{1}{97} - \frac{1}{100}.$$

Efectuînd reducerile, obținem:

$$S = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99.$$

396. Ne vom sprijini în demonstrație pe egalitatea $\log_a^m = \frac{\log m}{\log n}$ unde „log" reprezintă logaritmul în baza 10.

Egalitatea dată devine:

$$\frac{\log a}{\log (c+b)} + \frac{\log a}{\log (c-b)} = \frac{2 \log^2 a}{\log (c+b) \log (c-b)}. \qquad (1)$$

Eliminînd numitorii și simplificînd cu $\log a$, obținem:

$$\log (c-b) + \log (c+b) = 2 \log a = \log a^2,$$

sau:

$$\log (c-b)(c+b) = \log a^2,$$

de unde rezultă:

$$c^2 - b^2 = a^2 \text{ etc..}$$

397. Înlocuim $1 = \log_2^2$ și calculăm diferența:

$$d = \log_2 (a+b) - \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b) - 1 =$$

$$= \log_2 (a+b) - \log_2 \sqrt{ab} - \log_2^2,$$

sau:

$$d = \log_2 \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Avînd în vedere că $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} > 1$ pentru că $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - 1 = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2\sqrt{ab}} > 0$, rezultă că $d = \log_2 \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$ este pozitivă, ceea ce înseamnă că neegalitatea este adevărată.

398. Problema este analogă cu cea de la Nr. 373. Raționînd la fel găsim că $a_1 = a_2 = \ldots = a_{100}$ și prin urmare toate numerele a_1, $a_2 \ldots a_{100}$ sînt egale cu 1.

399. Din neegalitatea cunoscută $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ deducem $\frac{1+a_1}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot a_1}$; $\frac{1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_2}$; $\frac{1+a_3}{2} \geqslant \sqrt{a_3}$ etc... $\frac{1+a_n}{2} \geqslant \sqrt{a_n}$.

Înmulțind membru cu membru ale acestor neegalități, avem:

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n)}{2^n} \geqslant \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ținînd seama că $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ și eliminînd numitorul 2^n, ajungem la neegalitatea pe care ne-am propus s-o demonstrăm:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

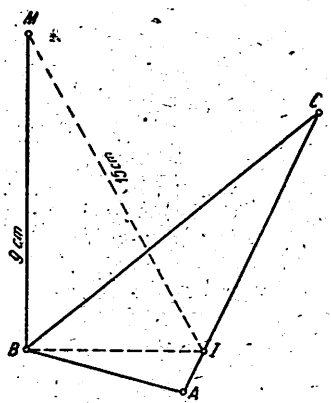


Fig. 161

400. Notăm laturile triunghiului dreptunghic cu $x = \overline{AC}$; $y = \overline{AB}$ și $z = \overline{BC}$ (fig. 161). Pe baza datelor problemei formăm sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 60, \\ x^2 = y^2 + z^2, \\ \left(\frac{yz}{x}\right)^2 = 15^2 - 9^2, \end{cases} \quad (1)$$

unde $\frac{yz}{x}$ este înălțimea $\overline{BI}$ lăsată din vîrful unghiului drept pe ipotenuză.

Din prima ecuație a sistemului (1) scoatem:

$$y + z = 60 - x.$$

Ridicînd ambii membri la pătrat și ținînd seama de celelalte două ecuații, care trebuie să dea y și z pozitivi, găsim pe aceea care ne dă x:

$$x^2 + 24x = 3600 - 120x + x^2,$$

cu soluția: $x = 25$ și apoi: $y = 15$; $z = 20$,
sau: $x = 25$; $y = 20$ și $z = 15$.

401. Conform datelor problemei avem:

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0,$$
$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1,$$
și: $$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 4.$$

Rezolvînd acest sistem cu necunoscutele a, b, c găsim:

$$a = 1; b = -2 \quad \text{și} \quad c = 1,$$

astfel încît trinomul devine:

$$y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Este evident că pentru $x = n$, valoarea trinomului este deci egală cu $(n-1)^2$.

402. Trecem primul radical în membrul drept:

$$\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1 - \sqrt{x-5-4\sqrt{x+1}}.$$

Ridicăm la pătrat ambii membri. După efectuarea reducerilor și trecerea în membrul stîng numai a expresiei care conține $\sqrt{x+1}$, obținem ecuația:

$$3 - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-5-4\sqrt{x+1}}.$$

După o nouă ridicare la pătrat a ambilor membri și după efectuarea tuturor reducerilor, ajungem la ecuația:

$$2\sqrt{x+1} = 15,$$

care admite soluția: $x = \frac{221}{4}$.

Rădăcina obținută verifică ecuația dată.

403. Adunînd ecuaţiile, membru cu membru, obţinem: $(x+y+z)[(a+2)x+(a+2)y+(a+2)z] = k^2+l^2+m^2$, sau: $(a+2)(x+y+z)^2 = k^2+l^2+m^2$; (1)

de unde rezultă $x+y+z = \varepsilon\sqrt{\frac{k^2+l^2+m^2}{a+2}}$ (unde: $\varepsilon = \pm 1$ şi $a \neq -2$). (2)

Notăm prescurtat:

$\varepsilon\sqrt{\frac{k^2+l^2+m^2}{a+2}} = S$, după care sistemul devine:

$$ax+y+z = \frac{k^2}{S},$$

$$x+ay+z = \frac{l^2}{S}, \qquad (3)$$

şi: $$x+y+az = \frac{m^2}{S}.$$

Scăzînd acum membrii ecuaţiei (2) din membrii corespunzători ai fiecărei ecuaţii a sistemului (3), obţinem:

$(a-1)x = \frac{k^2}{S} - S$; $(a-1)y = \frac{l^2}{S} - S$; $(a-1)z = \frac{m^2}{S} - S$

şi prin urmare:

$$x = \frac{(a+1)k^2 - l^2 - m^2}{\varepsilon(a-1)\sqrt{(a+2)(k^2+l^2+m^2)}}; \quad y = \frac{(a+1)l^2 - k^2 - m^2}{\varepsilon(a-1)\sqrt{(a+2)(k^2+l^2+m^2)}};$$

$$z = \frac{(a+1)m^2 - k^2 - l^2}{\varepsilon(a-1)\sqrt{(a+2)(k^2+l^2+m^2)}}$$

unde: $\varepsilon = \pm 1$ $a \neq -2$ şi de 1.

Să vedem acum ce se întîmplă cînd a ia una din valorile -2 sau 1.

Dacă $a = -2$ ecuaţia (1) devine:

$$0 = k^2+l^2+m^2,$$

egalitate imposibilă dacă cel puţin una din valorile lui k, l, m, este diferită de zero.

În cazul cînd $a = -2$ și $k = l = m = 0$ atunci sistemul este posibil, el admite soluția evidentă $x = y = z = 0$.

Dacă $a = 1$ sistemul dat devine

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &= k^2,\\ (x + y + z)^2 &= l^2,\\ (x + y + z)^2 &= m^2,\end{aligned} \qquad (4)$$

care este posibil și nedeterminat numai dacă $|k| = |l| = |m|$. În cazul cînd cel puțin două din valorile numerelor $|k|$, $|l|$, $|m|$ sînt neegale, sistemul este imposibil.

404. Dacă notăm cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației date, atunci conform problemei, noua ecuație trebuie să aibă ca rădăcini pe:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2} \text{ și } y_2 = \sqrt{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

De aci deducem:

$$y_1 + y_2 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}} \text{ și } y_1 y_2 = \frac{-p}{2\sqrt{q}},$$

iar ecuația căutată este:

$$y^2 - \left(\frac{-p}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) y - \frac{p}{2\sqrt{q}} = 0,$$

sau:

$$2\sqrt{q}\,y^2 + (p\sqrt{q} - 2)\,y - p = 0.$$

405. Polinomul de gradul al patrulea se descompune în două trinoame de gradul al doilea. Rădăcinile unui trinom avînd suma 1 rezultă că el are forma $x^2 - x + m$; iar celălalt avînd de asemenea suma rădăcinilor egală cu 1, are forma $x^2 - x + n$.

Scriem identitatea dintre polinom și produsul celor două trinoame, avînd totodată grija ca x^4 să aibă același coeficient în ambii membri.

$$4x^2 - 8x^3 + ax^2 + 27x + 18 \equiv 4\,(x^2 - x + m)\,(x^2 - x + n).$$

Punînd condiția ca aceleași puteri să aibă același coeficient, obținem sistemul care ne dă a, m și n:

$$\begin{aligned}4\,(m + n + 1) &= a,\\ -4\,(m + n) &= 27.\\ 4\ mn &= 18.\end{aligned}$$

Acesta, rezolvat, ne dă $m = -6$; $n = -\frac{3}{4}$ şi $a = -23$.

Rezultă că rădăcinile ecuaţiei de gradul al IV-lea sînt date de ecuaţiile:

$x^2 - x - 6 = 0$ cu rădăcinile: $x_1 = -2$; $x_2 = 3$

şi $4x^2 - 4x - 3 = 0$ cu rădăcinile: $x_3 = -\frac{1}{2}$; $x_4 = \frac{3}{2}$.

406. Împărţind peste tot cu 6^x, ecuaţia devine:

$$\frac{9^x}{6^x} + \frac{4^x}{6^x} - \frac{13}{6} = 0,$$

sau:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{13}{6} = 0.$$

Notăm: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$, după care ecuaţia se transformă în:

$$y + \frac{1}{y} - \frac{13}{6} = 0,$$

sau: $6y^2 - 13y + 6 = 0$ cu rădăcinile:

$$y_1 = \frac{3}{2} \text{ şi } y_2 = \frac{2}{3},$$

cărora le corespund ecuaţiile:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \text{ cu rădăcina } x_1 = 1$$

şi:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \text{ cu rădăcina } x_2 = -1.$$

PARTEA A IV-a

PROBLEME DIVERSE ŞI TRIGONOMETRIE

407. Să notăm cu $a = \overline{MI}$ şi $b = \overline{IP}$ braţele corespunzătoare celor două platane (fig. 162). Dacă x este greutatea echilibrată succesiv de 3,5 kg şi 4,5 kg, avem:

$$xa = 3,5b,$$

şi

$$xb = 4,5a.$$

Eliminînd x între cele două relaţii, obţinem:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{35}{45}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

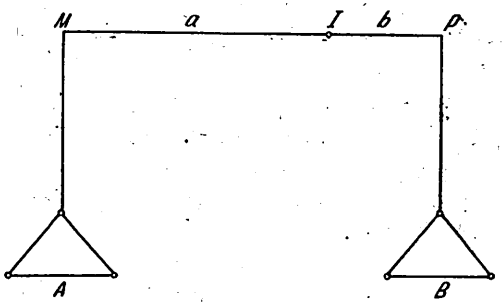


Fig. 162

Fie acum y greutatea mărfii aşezată în platanul A şi echilibrată de 2 kg, iar z cea din platanul B şi echilibrată tot de 2 kg, avem:

$$ya = 2b,$$

şi

$$zb = 2a.$$

Rezultă $y + z = 2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 2\left(\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{32}{3\sqrt{7}} = \frac{32\sqrt{7}}{21} \approx$ $\approx 4,031$ kg care este greutatea totală a mărfii cîntărite.

408. 1) Să considerăm un paralelogram oarecare $ABCD$ cu laturile $\overline{AB} = a$; $\overline{DA} = b$ şi să evaluăm segmentele formate de bisectoarele unghiurilor A şi B pe dreapta DC. Considerăm segmentele de pe dreapta DC, orientate (cu semn). Avem (fig. 163):

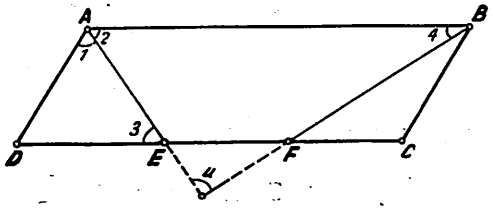


Fig. 163

$$\overline{DE} = \overline{DA} = b$$

pentru că $\hat{E}_3 = \hat{A}_2$ ca alterne interne formate de paralele, iar $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, dreapta AE fiind bisectoare.

La fel avem $\overline{FC} = \overline{CB} = b$ pentru aceleaşi motive.

Din relaţia $\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC} = \overline{DC}$, rezultă:

$$\overline{EF} = \overline{DC} - (\overline{DE} + \overline{FC}) = a - 2b.$$

În cazul numeric dat, avem $\overline{DE} = 2{,}5$; $\overline{EF} = 7{,}5 - 2.2{,}5 = 2{,}5$ şi $\overline{FC} = 2{,}5$ ceea ce justifică afirmaţia de sub 1).

2) Unghiul u al bisectoarelor este egal cu $u = 180° - \hat{A}_2 - \hat{B}_4 = 180° - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180° - \frac{180°}{2} = 90°$.

3) Pentru ca bisectoarele să se întîlnească pe latura CD a paralelogramului trebuie ca $\overline{EF} = 0$ sau $a = 2b$.

Să notăm cu x cu cît trebuie să mărim atît pe 7,5 cît şi pe 2,5 pentru ca bisectoarele să fie concurente pe CD. Conform relaţiei de mai sus trebuie să avem:

$$7{,}5 + x = 2\,(2{,}5 + x),$$

care ne dă: $x = 5$ cm.

409. a) Bisectoarea unghiului xOy este axa de simetrie şi pentru cercul tangent laturilor sale; de aceea el conţine A' simetricul lui A faţă de bisectoare. Să presupunem cercul tras

prin A şi A', atingînd latura Ox în T (fig. 164). Dreapta AA' taie Ox în I. Aplicînd proprietatea puterii, avem:

$$\overline{IT}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IA'},$$

de unde rezultă două valori egale şi de semne contrarii pentru $\overline{IT}$. Acestora le corespund două cercuri: TAA' şi $T'AA'$. Construcţia de executat este deci următoarea:

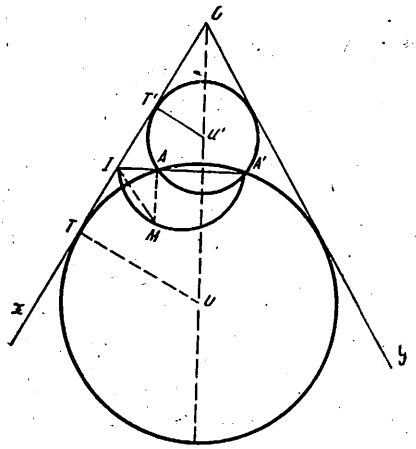


Fig. 164

Se ia simetricul A' al lui A faţă de bisectoare. Se prelungeşte $A'A$ pînă taie Ox în I. Se construieşte un cerc cu diametrul IA', iar în A se ridică o perpendiculară care taie cercul în M. Segmentul $\overline{IM}$ este media proporţională a segmentelor $\overline{IA}$ şi $\overline{IA'}$. Cu centrul în I şi cu raza $\overline{IM}$ se taie Ox în T şi T'.

Perpendicularele în T şi T', pe Ox, taie bisectoarea în U şi U' centrele cercurilor căutate.

b) Problema admite două soluţii. Aceasta reiese din cele spuse mai sus. c) Să presupunem $OT = r$ şi unghiul $\widehat{TOU} = \alpha$. Avem aria TSO = aria OTU − aria sect $TUS = \frac{r^2 \cot \alpha}{2} - \frac{\pi r^2 (90° - \alpha)}{360}$ (S este punctul unde arcul mai mic taie bisectoarea).

Rezultă că aria cuprinsă între laturile unghiului şi cel mai mic dintre arce este egală cu:

$$A = r^2 \left[\operatorname{cotg} \alpha - \frac{\pi (90° - \alpha°)}{180} \right].$$

În cazul problemei $\alpha = 30°$; prin urmare $A = r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$.

410. Înainte de a deriva, să mai simplificăm expresia lui y. Avem :

$$y = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\right) + \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} + \\ + 2\operatorname{arc\,cotg} x,$$

sau :

$$y = -\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x\,(2 + \operatorname{tg}^2 2x) + \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} + 2\operatorname{arc\,cot} x.$$

Dacă înlocuim $x = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ în expresiile cu „arc" suma lor devine :

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} + 2\operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 2\varphi) + \\ + 2\operatorname{arc\,cotg}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\varphi + k\pi + 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + k'\pi\right) = \\ = k\pi + 2k'\pi + \pi.$$

Suma fiind constantă, derivata ei este nulă, rezultă deci că derivata lui y' se reduce la :

$$y' = -\frac{1}{4}(2\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^4 2x) = -2\operatorname{tg} 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}(1+\operatorname{tg}^2 2x) = \\ = -\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x} = -\frac{2\sin 2x}{\cos^5 2x}.$$

411. a) 1. Egalitatea $4a - 2b + c = 0$ exprimă că $x = -2$ este rădăcină a ecuației $ax^2 - bx + c = 0$, rezultă de aci că ecuația având rădăcini raționale, discriminantul ei, $b^2 - 4ac$, este un pătrat perfect.

2) Din egalitatea $2a + \sqrt{2}b + c = 0$ scoatem $c = -2a - b\sqrt{2}$ pe care o introducem în $b^2 - 4ac$.

Avem :

$$b^2 - 4ac = b^2 + 4a(2a + b\sqrt{2}) = b^2 + 4ab\sqrt{2} + 8a^2 = \\ = (b + 2a\sqrt{2})^2.$$

b) Calculăm: $S = \sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)} =$

$$= \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{21\sqrt{11}}{4}.$$

Deducem raza cercului circumscris:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot \frac{21\sqrt{11}}{4}} = \frac{15\sqrt{11}}{11}$$

și a cercului înscris:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{21\sqrt{11}}{4}}{\frac{21}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

412. Primul cerc de tifon are raza $(5 + 0{,}5)$ mm, al doilea cerc $(5 + 2.0{,}5)$ mm, al treilea $(5 + 3.0{,}5)$ mm ... și al 100-lea are raza $(5 + 100.0{,}5)$ mm.

Rezultă că lungimea feșei este:

$$L = 2\pi[(5 + 0{,}5) + (5 + 2.0{,}5) + \ldots + (5 + 100.0{,}5)] \text{ mm.}$$

sau: $L = 2\pi\ [100.5 + 0{,}5\ (1 + 2 + 3 + \ldots + 100)] =$

$$= 2\pi\left(100.5 + 0{,}5 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2}\right) \approx 18\,997 \text{ mm} \approx 19 \text{ m.}$$

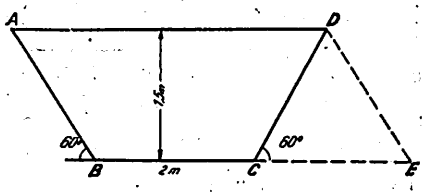


Fig. 165

413. 1) Calculăm aria secțiunii $ABCD$ (fig. 165), care este un trapez. Ducem din D paralela DE la latura AB. Triunghiul DCE este echilateral cu înălțimea 1,5; rezultă că latura $\overline{CE}$ este egală cu:

$$\overline{CE} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

și, prin urmare, baza DA a trapezului este egală cu:

$$\overline{BC} + \overline{CE} = 2 + \sqrt{3}.$$

Aria secţiunii este deci:

$$S = \frac{(2+2+\sqrt{3})1{,}5}{2} = \frac{6+1{,}5\sqrt{3}}{2} \approx \frac{8{,}595}{2} \approx 4{,}297 \text{ m}^2.$$

Urmează că debitul pe secundă este de $2.4{,}297 = 8{,}595$ m³/sec., iar pe oră este $8{,}595 \cdot 3600 \approx 30\,942$ m³/sec.

2) Aria cimentată este egală cu:

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \cdot 1000 \text{ m},$$

sau: $(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}) \cdot 1000\text{m} \approx 5460 \text{ m}^2$.

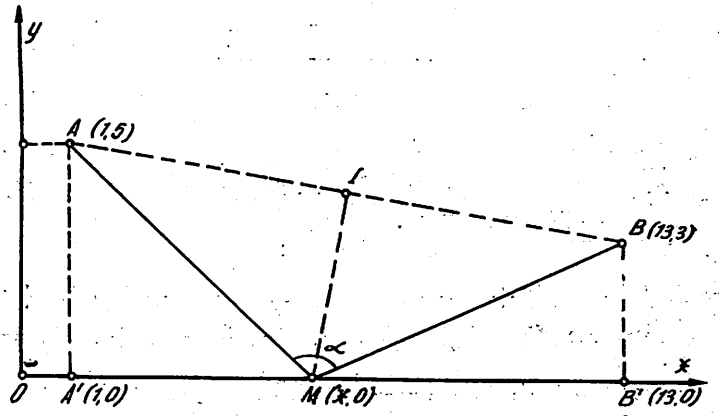


Fig. 166

414. Notăm $\overline{OM} = x$ (fig. 166), atunci $\overline{AM} = \sqrt{(x-1)^2 + 5^2}$ şi $\overline{MB} = \sqrt{(13-x)^2 + 3^2}$. Scriem că cele două distanţe sînt egale; avem ecuaţia:

$$\sqrt{(x-1)^2 + 5^2} = \sqrt{(13-x)^2 + 3^2},$$

a cărei soluţie este $x = \frac{19}{3}$ şi căreia îi corespunde:

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \sqrt{\left(\frac{19}{3} - 1\right)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{481}}{3}.$$

Lungimea segmentului $\overline{AB}$ este egală cu $\sqrt{(13-1)^2+(3-5)^2} = \sqrt{148}$.

Din cauză că triunghiul AMB este isoscel, perpendiculara din M pe baza AB trece prin mijlocul I al segmentului $\overline{AB}$. Dacă notăm cu α unghiul AMB, atunci avem:

$$\overline{IB} = \overline{MB} \sin\frac{\alpha}{2} \text{ sau } \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{148}}{2}}{\frac{\sqrt{481}}{3}} = \frac{3\sqrt{148}}{2\sqrt{481}}.$$

Aplicînd logaritmii, aflăm:

$$\alpha = 112°37'.$$

415. Vom calcula în primul rînd unele elemente ale trapezului de bază. Avînd în vedere că trapezul este isoscel cu diagonalele perpendiculare, rezultă că partea $\overline{IE}$ (fig. 167) din înălțime este egală cu $\frac{\overline{AB}}{2}$, iar partea IF egală cu $\frac{\overline{DC}}{2}$.

Cum $\overline{EI} = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$ și $\overline{IF} = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$, rezultă că $\overline{AB} = 4$ m și $\overline{DC} = 6$ m, iar $\overline{AD}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{ID}^2 = 2\overline{EI}^2 + 2\overline{IF}^2 = 2(\overline{EI}^2 + \overline{IF}^2) = 2(4+9) = 26$ și prin urmare $\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{26}$.

a) Volumul rezervorului este $V = \frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2} \cdot \overline{EF} \cdot 4 = 100 \text{ m}^3 = 100\,000$ litri.

b) Aria rezervorului fără capac este egală cu aria laterală plus aria fundului, adică

$$S = (4+6+2\sqrt{26}) \cdot 4 + 25 \approx 105,\ 79\,216 \approx 105{,}80 \text{ m}^2.$$

Dacă notăm cu x aria tablei înainte de consum, avem:

$$x - \frac{3x}{100} = 105{,}80,$$

de unde rezultă: $x = 109{,}07$ m^2.

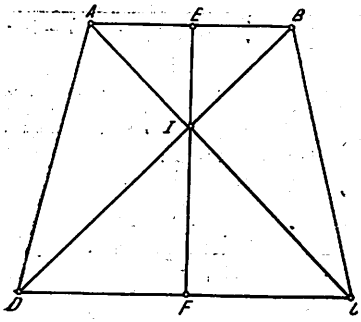


Fig. 167

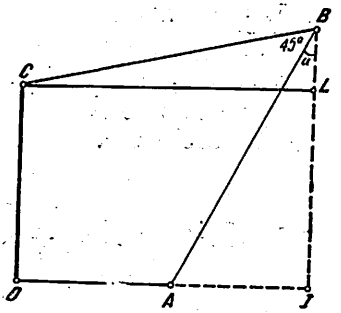


Fig. 168

416. Să considerăm, date mai generale, $\overline{OA} = a$ și $\overline{OC} = b$, iar $\overline{IB} = k.\overline{AI}$ (fig. 168). Ducem din C o paralelă CL la OI. Dacă notăm $\widehat{ABI} = u$ și $\overline{AI} = x$, avem $\overline{BI} = kx$ și $\operatorname{tg} u = \frac{1}{k}$, iar în triunghiul CLB, $\operatorname{tg}(45° + u) = \frac{CL}{BL} = \frac{a+x}{kx-c}$.

Rezultă ecuația care ne dă x.

$$\frac{a+x}{kx-c} = \frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}} = \frac{k+1}{k-1}$$

cu soluția: $x = \frac{k(c+a)+(c-a)}{k^2+1}$.

Se poate constata că această soluție este aceeași și în cazul cînd L se așază deasupra lui B.

Aria figurii $OABC$ este egală cu:

$$S = \text{aria } OIBC - \text{aria } AIB = \frac{(\overline{OC}+\overline{IB})(\overline{OA}+\overline{AI})}{2} - \frac{\overline{AL}\cdot\overline{IB}}{2},$$

sau:

$$S = \frac{(c+kx)(a+x)-kx^2}{2} = \frac{ac}{2} + \frac{(ak+c)}{2}\cdot\frac{k(c+a)+c-a}{k^2+1}.$$

În cazul numeric din problemă, avem $a = 4$; $c = 5$ şi $k = 2$;
prin urmare :

$$S = 10 + \frac{13}{2} \cdot \frac{2 \cdot 9 + 1}{5} = 34{,}7 \text{ cm}^2.$$

417. a) Înlocuim $2 \cos (x - 30°) \cos (x - 45°) = \cos (x - 30° + x - 45°) + \cos (x - 30° - x + 45°)$.

Ecuaţia devine :

$$\cos (2x - 75°) + \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°,$$

sau : $\cos (2x - 75°) = \cos 45° - \cos 15° = -2 \sin 15° \sin 30° = -\sin 15°$.

Transformăm : $-\sin 15° = \cos (90° + 15°) = \cos 105°$, după care ajungem la ecuaţia :

$$\cos (2x - 75°) = \cos 105°$$

cu soluţiile : $(2x - 75°) \pm 105° = k.360°$; de unde rezultă :

$$x_1 = k.180° - 15° \text{ şi } x_2 = k.180° + 90°.$$

b) Dacă notăm cu a_1 primul termen ; a_n termenul de rangul n ; n numărul termenilor şi r raţia, avem de rezolvat sistemul de ecuaţii

$$a_1 + (n - 1)7 = 189 \text{ şi } \frac{n(a_1 + 189)}{2} = 2646.$$

Înlocuind în ecuaţia a doua pe a_1 scos din prima ecuaţie, obţinem ecuaţia de gradul al doilea în n :

$$\frac{n(189 - 7n + 7 + 189)}{2} = 2646,$$

sau :

$$7n^2 - 385\, n + 5292 = 0$$

$$n^2 - 55\, n + 756 = 0$$

$$n = \frac{55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \cdot 756}}{2} = \frac{55 \pm 1}{2} \quad \begin{matrix} n_1 = 27 \\ n_2 = 28 \end{matrix}$$

Pentru $n = 27$, $a_1 = 7$; progresia este 7, 14, 21 ... 189
Pentru $n = 28$, $a_1 = 0$; progresia este 0, 7 ; 14 ... 189

418. Notăm unghiul din C cu α. Din teorema sinusurilor aplicată la triunghiul ABC, avem (fig. 169).

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^0} = 2,$$

de unde rezultă: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi deci $\alpha = 45°$, singura soluţie acceptabilă în cazul problemei noastre.

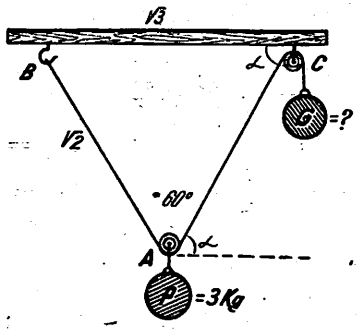


Fig. 169

De-a lungul lui BA acţionează o tensiune T, iar de-a lungul firului CA, forţa G. Cele trei forţe P, T şi G fiind în echilibru, avem:

$$\frac{T}{\sin(\widehat{PAC})} = \frac{G}{\sin(\widehat{BAP})} = \frac{P}{\sin 60^\circ}. \quad (1)$$

Deoarece $\alpha = 45°$, rezultă $\widehat{PAC} = 90° + 45° = 135°$ şi $\widehat{BAP} = 90° + 75° = 165°$, înlocuind aceste valori în (1), obţinem:

$$\frac{T}{\sin 45°} = \frac{G}{\sin 15°} = \frac{3}{\sin 60°}.$$

De unde rezultă $G = \frac{3\sin 15°}{\sin 60°} = \frac{3\sin(45° - 30°)}{\sin 60°} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$, iar $T = \frac{3\sin 45°}{\sin 60°} = \sqrt{6}$.

419. 1) Dacă notăm înălţimea $\overline{AD} = x$, atunci $\overline{DC} = 3 + x$ (fig. 170). Rezultă ecuaţia care ne dă pe $\overline{AD}$:

$$x^2 = 4(x + 3),$$

cu rădăcina acceptabilă $x = \overline{AD} = 6$ m.

2) Avem:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} = 13.6 = 78$$

şi: $\overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} =$

$$= \sqrt{\overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \sqrt{13^2 + 2.78} = 5\sqrt{13}.$$

Rezultă că ecuaţia de gradul al doilea care are ca rădăcini catetele, este :

$$x^2 - 5\sqrt{13}x + 78 = 0.$$

420. Notăm cu x numărul de kilometri parcurşi în susul apei şi cu y cei parcurşi în josul apei. Prima parte a problemei primeşte rezolvarea prin sistemul :

$$x + y = 375,$$

$$\frac{x}{25} + \frac{y}{35} = 13,$$

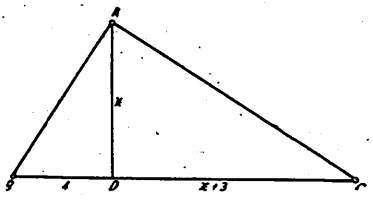


Fig. 170

a cărui soluţie este : $x = 200$; $y = 175$.

În sus vaporul a mers timp de 8 ore şi în jos 5 ore.

Dacă z este viteza vaporului pe apă stătătoare şi u este viteza apei, avem :

$$z + u = 35,$$

şi $$z - u = 25,$$

cu soluţia : $z = 30$ şi $u = 5$.

Aşadar vaporul are o viteză de 30 km/oră pe o apă stătătoare, iar viteza apei este de 5 km/oră.

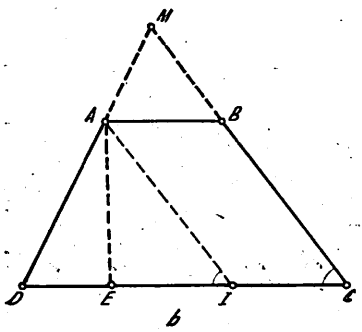


Fig. 171

421. 1) Dacă notăm cu x şi y cele două baze ale trapezului, avem :

$\frac{(x+y)\,20}{2} = 1800$ şi $xy = 7200$, de unde rezultă că x şi y sînt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 - 180z + 7200 = 0,$$

ale cărei soluţii sînt : $z_1 = 60$ şi $z_2 = 120$. Baza mare este deci $x = 120$ m şi baza mică $y = 60$ m.

2) a) Să notăm cu M punctul de întîlnire al laturilor neparalele $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$ (fig. 171).

Avem:

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DI}}$ (punctul I este intersecția paralelei din A la BC cu baza mare DC).

Deducem:

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AB}}{\overline{DI}} = \frac{25 \cdot 60}{120 - 60} = 25 \text{ m.}$$

b) Unghiul C este egal cu unghiul AID. Pentru a-l calcula pe acesta aflăm mai întîi latura $\overline{AI}$.

Avem: $\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DI}^2 - 2\,\overline{AD} \cdot \overline{DI} \cos \hat{D}$.

Observînd că: $\sin \hat{D} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, rezultă: $\cos \hat{D} = \frac{3}{5}$.

După ce înlocuim în (1), $\overline{AD} = 25$, $\overline{DI} = 60$ și $\cos \hat{D} = \frac{3}{5}$ obținem: $\overline{AI} = 5\sqrt{97}$.

Aplicînd teorema sinusurilor, deducem:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \widehat{AID}} = \frac{\overline{AI}}{\sin \hat{D}}, \text{ sau: } \sin C = \frac{25 \cdot \frac{4}{5}}{5\sqrt{97}} = \frac{4}{\sqrt{97}}.$$

Cu logaritmii găsim $\hat{C} = 23°57'46''$.

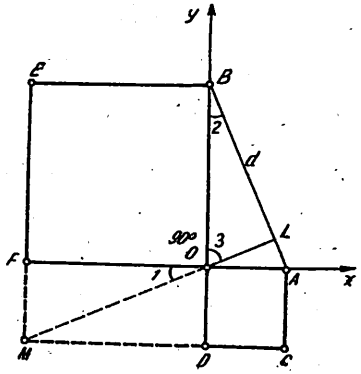


Fig. 172

422. 1) Notăm cu M intersecția dreptelor CD și EF și cu L intersecția dreptei OM cu ipotenuza $\overline{AB}$ (fig. 172).

Triunghiurile dreptunghice OFM și OAB sînt egale, avînd: $\overline{OF} = \overline{OB}$ și $\overline{FM} = \overline{OD} = \overline{OA}$. Rezultă: $\hat{B}_2 = \hat{O}_1$ și cum: $\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180° - 90° = 90°$, deducem: $\hat{O}_3 + \hat{B}_2 = 90°$, iar dreapta MOL este perpendiculară pe direcția fixă AB. Locul lui M este deci această perpendiculară.

2). Orice număr prim în afară de 2 şi 3 este de forma $p = 6m \pm 1$.

Rezultă deci:

$$p^2 - 1 = (6m \pm 1)^2 - 1 = 36\ m^2 \pm 12m = 12\ m(3m \pm 1).$$

Oricum ar fi m, expresia $m(3m \pm 1)$ este un număr par, de unde deducem că:

$$p^2 - 1 = 12m\ (3m \pm 1) = \mathcal{M}24.$$

423. Volumul cristalului este $\frac{15,6}{2,6} = 6 \cdot \text{cm}^3$.

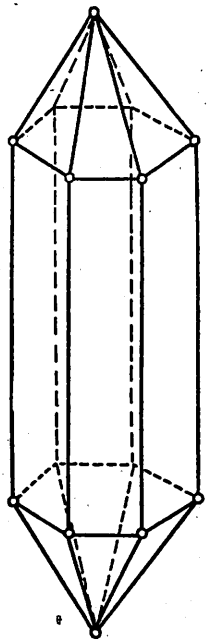


Fig. 173

Pentru că înălţimea prismei este jumătatea distanţei dintre vîrfurile piramidelor, rezultă că această înălţime este dublul înălţimii unei piramide. Prin urmare o jumătate de prismă conţine trei piramide şi deci tot cristalul are 8 piramide.

Rezultă că volumul unei piramide este:

$\frac{6}{8}$ cm^3, iar al prismei $6 \cdot \frac{6}{8} = \frac{36}{8} = 4,5$ cm^3.

Înălţimea prismei este:

$$I = \frac{4,5}{\frac{3 \cdot 1^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{4,5 \cdot 2}{3 \cdot 1^2 \sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ cm},$$

iar distanţa dintre vîrfurile piramidelor este de $2I = 2\sqrt{3} \approx 3,46$ cm.

424. Notăm cu R raza sfertului de cerc şi cu x raza necunoscută a cercului I tangent interior sfertului de cerc în T, razei OB în N şi semicercului M de diametru OA în S (fig. 174). Se ştie că centrele O şi I sînt în linie dreaptă cu punctul de tangenţă T; de asemeni sînt coliniare şi punctele I, S, M, iar IN este perpendiculară pe OB. Rezultă $\overline{OI} = R - x$, $\overline{IM} = \frac{R}{2} + x$ şi $OL = \overline{NI} = x$ (L proiecţia lui I pe OA). Aplicăm teorema pătra-

tului unei laturi în triunghiul OIM unde avem şi $\overline{OM} = \frac{R}{2}$,

$$\overline{IM}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OM}^2 - 2\ \overline{OM}\cdot\overline{OL},$$

$$\text{sau : } \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = (R - x)^2 + \frac{R^2}{4} - Rx,$$

cu soluţia : $x = \frac{R}{4}$.

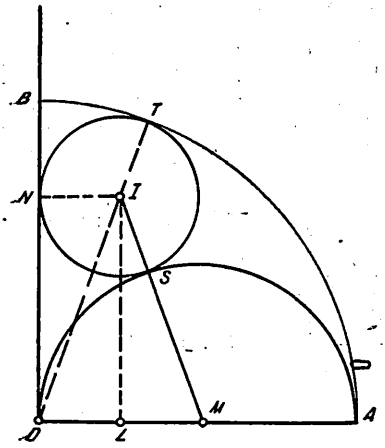


Fig. 174

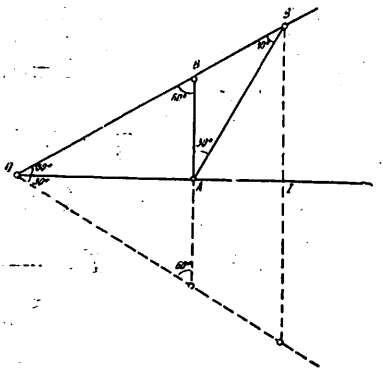


Fig. 175

425. Avem $\overline{BB'} = \overline{AB} = \frac{\overline{OB}}{2} = 5$ cm (fig. 175) :

$\overline{B'I} = \frac{\overline{OB} + \overline{BB'}}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm ; $\overline{OA} = 5\sqrt{3}$; $\overline{AI} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ şi $\overline{AB'} = 5\sqrt{3}$.

Rezultă că aria descrisă de ABB' în jurul axei OA este egală cu : S = aria cercului cu raza $\overline{AB}$ + aria laterală a conului cu ge-

neratoarea $\overline{AB'}$ + aria laterală a trunchiului de con cu generatoarea $\overline{BB'}$.

Urmează deci :

$$S = \pi.\overline{AB}^2 + \pi.\overline{IB'}.\overline{AB'} + \pi.\overline{BB'}\,(\overline{AB} + \overline{IB'}) = \frac{25(7+3\sqrt{3})\pi}{2}.$$

Volumul corpului este egal cu :
V = volumul trunchiului descris de $\overline{BB'}$ — volumul conului descris de $\overline{AB'}$,adică :

$$V = \frac{\pi.\overline{AI}}{3}(\overline{AB}^2 + \overline{AB}\cdot\overline{IB'} + \overline{IB'}^2) - \frac{\pi.\overline{AI}}{3}\cdot\overline{IB'}^2 =$$

$$= \frac{\pi.\overline{AI}.\overline{AB}}{3}(\overline{AB} + \overline{IB'}).$$

Rezultă deci :

$$V = \frac{625\,\pi\sqrt{3}}{4}.$$

426. a) Pentru a şti cum trebuie făcută tăietura e necesar să cunoaştem numărul de grade al sectorului AOB pe care-l notăm deocamdată cu $n°$.

Pentru ca baza conului să se suprapună exact peste baza mică a trunchiului de con este necesar ca lungimea arcului AB să fie egală cu lungimea arcului CMD, adică :

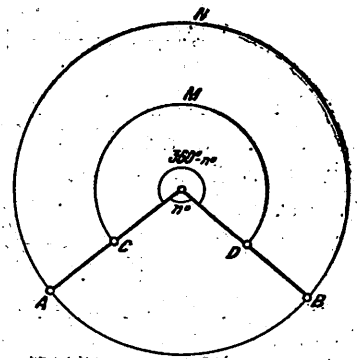


Fig. 176

$$\frac{\pi\, r n°}{180} = \frac{\pi\frac{r}{2}(360° - n°)}{180}$$

de unde rezultă : $n° = 120°$.

b) Înălţimea corpului care rezultă este formată din suma înălţimilor trunchiului şi al conului.

Generatoarea trunchiului este $\overline{AO} = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$, iar razele bazelor trunchiului vor fi:

$$\frac{\text{lungimea arc } ANB}{2\pi} = \frac{r(360^\circ - 120^\circ)}{360^\circ} = \frac{2r}{3};$$

$$\frac{\text{lungimea arc } CMD}{2} = \frac{r(360^\circ - 120^\circ)}{720^\circ} = \frac{r}{3}.$$

Generatoarea conului este $\overline{OA} = r$, iar raza bazei conului este $\frac{r.120^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{3}$.

Rezultă că înălțimea I a trunchiului este:

$$I = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{2r}{3} - \frac{r}{3}\right)^2} = \frac{r\sqrt{5}}{6},$$

iar a conului: $i = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{9}} = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$.

Urmează că înălțimea corpului este:

$$h = I + i = \frac{r\sqrt{5}}{6} + \frac{2r\sqrt{2}}{3} = \frac{r}{6}(\sqrt{5} + 4\sqrt{2}).$$

427. Fie ACB arcul de cerc, O centrul cercului, C punctul cel mai înalt al arcului, iar $\overline{AB}$ podul. Dreapta OC care unește O cu C va fi mediatoarea corzii $\overline{AB}$. Alegem ca necunoscută $\overline{OD} = x$. Din figură (fig. 177) se citește că:

$$\overline{CD} = \overline{OC} - \overline{OD} = R - x.$$

Triunghiul dreptunghic ODB dă: $\overline{DB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OD}^2 = R^2 - x^2$,

de unde: $\overline{DB} = \sqrt{R^2 - x^2}$, deci: $\overline{AB} = 2\overline{DB} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

În problemă se dă $\overline{AB} + \overline{CD} = 2R$. Înlocuind $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ prin expresiile lor, avem $2\sqrt{R^2 - x^2} + (R - x) = 2R$. Izolăm radicalul $2\sqrt{R^2 - x^2} = R + x$. Pentru ca radicalul să fie

real, va trebui ca $|x| \leqslant R$. Apoi, radicalul fiind pozitiv sau nul, va trebui să avem $R + x \geqslant 0$, $x \geqslant -R$. Ambele neegalităţi sînt satisfăcute cînd $-R < x < R$, deoarece ne limităm la valori pozitive ale lui x ($x \leqslant R$).

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuaţiei şi avem:

$$4(R^2 - x^2) = (R + x)^2; \quad 4(R + x)(R - x) = (R + x)^2.$$

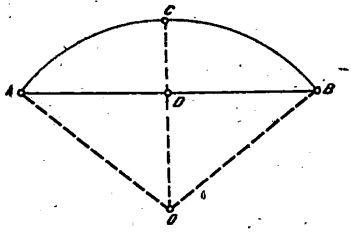


Fig. 177

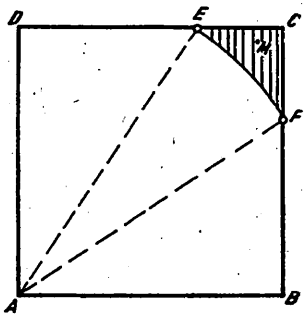


Fig. 178

Simplificăm prin $R + x$, ceea ce este permis, deoarece R şi x sînt cantităţi pozitive, deci $R + x \neq 0$:

$4(R - x) = R + x$; $4R - 4x = R + x$; $5x = 3R$; $x = \frac{3R}{5}$.

Centrul cercului se află la $\frac{3}{5}$ din rază sub pod.

428. 1) Să presupunem $\overline{MA} > \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (fig. 178), atunci punctul M este situat în exteriorul cercului cu centrul în A şi raza $\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Avem:

$$\overline{DE} = \overline{BF} = \sqrt{-1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

$\overline{MB} < \overline{BE} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\overline{MD} < \overline{DF} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ şi $\overline{MC} < \overline{BE} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Rezultă deci că cel mult una din distanţele $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ este mai mare decît $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

2) Să presupunem $\overline{MA} > 1$. În acest caz, punctul M este situat în afara unui cerc cu centrul în A şi raza 1, de unde rezultă $\overline{MC} < 1$. Dacă avem şi $\overline{MB} > 1$, atunci M este situat şi în afara cercului cu centrul B şi raza 1, adică în regiunea haşurată ca în figura 179, iar $\overline{MD}$ rezultă mai mic decît 1. Ur-

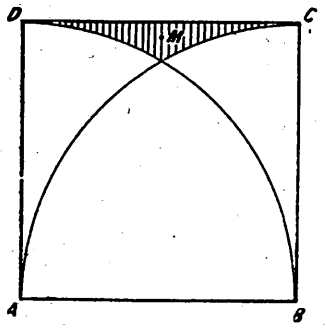


Fig. 179

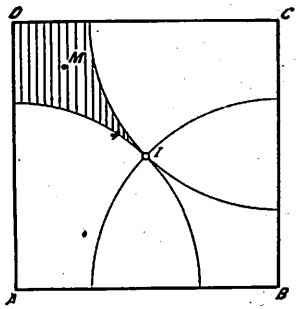


Fig. 180

mează deci că cel mult două din cele patru distanţe sînt mai mari decît 1.

3). Să presupunem $\overline{MA} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\overline{MB} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ şi $\overline{MC} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Punctul M este situat în afara cercurilor cu centrele în A, B, C şi raza cît jumătatea diagonalei pătratului. Toate cele trei cercuri se întîlnesc în I centrul pătratului, iar M este situat în regiunea haşurată, ca în figura 180. Avem în acest caz $\overline{MD} < \overline{ID} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, ceea ce confirmă a treia parte a propoziţiei.

429. Excluzînd cazul cînd $c = 0$ pentru care ecuaţia devine identitate, după reducerile din primul membru şi din cel de al doilea şi simplificarea cu c, ecuaţia devine:

$$\frac{1}{(x+b-c)(x+b)} + \frac{1}{(x+a)(x+a-c)} = 0,$$

sau:

$$\frac{2x^2 + 2(a + b - c)\,x + a^2 + b^2 - bc - ac}{(x + a)(x + b)(x + a - c)(x + b - c)} = 0.$$

Dacă nici una din valorile $-a$; $-b$; $c - a$; $c - b$ nu anulează numărătorul fracției, atunci rădăcinile ecuației sînt date de:

$$2x^2 + 2(a + b - c)x + a^2 + b^2 - ac - bc = 0 \qquad (1)$$

și ele sînt:

$$x_{1,2} = \frac{c - a - b \pm \sqrt{c^2 - (a - b)^2}}{2},$$

sau:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[c - a - b \pm \sqrt{(a + c - b)\ (b + c - a)}\right].$$

În cazul cînd a, b, c sînt laturile unui triunghi, atunci $a + c > b$ și $b + c > a$, ceea ce înseamnă că discriminantul ecuației (1) este pozitiv și prin urmare rădăcinile $x_{1,2}$ sînt reale.

430. Pentru a demonstra afirmația din enunț, vom arăta mai întîi că aria unei părți determinată de o secantă oarecare ce trece prin centrul de greutate este cuprinsă între anumite limite.

Să considerăm secanta LM care trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC (fig. 181).

Ducem prin G paralela EF la baza BC a triunghiului și medianele AGA', BGB'. Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC, atunci aria AEF este $\frac{4}{9}S$, pentru că:

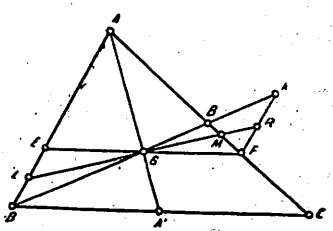


Fig. 181

$$\frac{\text{aria } AEF}{\text{aria } ABC} = \left(\frac{AG}{AA'}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$ iar aria $FECB$ este egală cu: $S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S$. Mai observăm că dacă luăm o extremitate a secantei L pe latura $\overline{EB}$ a trapezului, cealaltă extremitate M cade între mijlocul B' și F. Această poziție a secantei LM este generală, pentru că oricum am lua secanta în afară de cazurile cînd ea

trece prin vîrfuri, o extremitate a ei este aşezată pe una din laturile neparalele ale trapezului de tipul lui $EFCB$.

Cu aceste observaţii, putem trece la aşezarea ariei ALM între două numere fixe.

Avem:

$$\text{aria } ALM = \text{aria } AEF + \text{aria } EGL - \text{aria } GMF \quad (1)$$

şi: aria ALM = aria ABB' + aria $GB'M$ — aria BLG.

Prelungind $\overline{BG}$ cu segmentul $\overline{GK} = \overline{BG}$, punctul B' se află la mijlocul lui $\overline{GK}$, iar triunghiurile GFK şi EGB sînt simetrice faţă de G, de unde rezultă aria EGL = aria GRF şi aria GRK = aria GLB.

Deducem:

aria EGL — aria GMF = aria GRF — aria GMF = aria $MFR > 0$ şi aria $GB'M$ — aria BLG = aria $GB'M$ — aria GKR = — aria $B'MRK < 0$.

Dacă ţinem seama de ultimele rezultate şi de egalităţile (1) obţinem:

aria $AEF <$ aria $ALM <$ aria ABB',

sau: $\frac{4}{9}S <$ aria $ALM < \frac{1}{2}S$.

Dar cum avem: $\frac{1}{2}S < \frac{5}{9}S$, urmează că avem şi:

$\frac{4}{9}S =$ aria $AEF <$ aria $ALM < \frac{5}{9}S =$ aria $EBCF$.

Revenind la enunţul din problemă, rezultă că:

$\frac{4}{9} \cdot 900 = 400$ gr $<$ greutatea $ALM < \frac{5}{9} \cdot 900 = 500$ gr

şi 400 gr $<$ greutatea $LMCB <$ 500 gr,

iar în cazul cînd secanta trece prin vîrfuri, bucăţile sînt egale şi fiecare cîntăreşte 450 gr.

Urmează că în nici un caz nu se poate obţine o bucată care să cîntărească mai puţin de 400 gr.

431. Dacă notăm dimensiunile dreptunghiului cu x şi y avem conform datelor (fig. 182):

$$2x + y = 100 \text{ m}.$$

Aria terenului este:

$$S = xy,$$

sau : $S = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100\ x,$

$$S = 1250 - 2\ (x - 25)^2.$$

Aria S devine maximă cînd nu scădem nimic din 1250, adică atunci cînd $x - 25 = 0$ sau $x = 25$, de unde rezultă $y = 100 - 50 = 50$.

Împrejmuirea de arie maximă trebuie să aibă în lungime 50 m, iar în lățime 25 m. Terenul maxim are aria 1250 m^2.

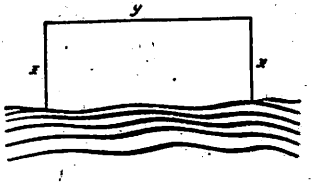


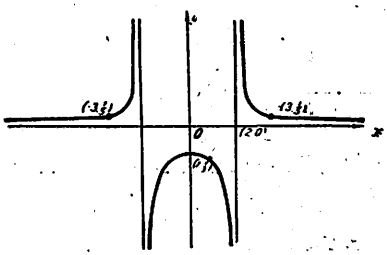
Fig. 182

432. Cea mai mică valoare a numitorului o avem cînd $x=0$ pentru care y are valoarea maximă $y = -\frac{1}{4}$

Funcția crește pentru valorile lui x negative, iar pentru x pozitive funcția descrește. Pentru $x = \pm 2$, y devine ∞.

Introducem într-un tabel diferite valori ale lui x și valorile corespunzătoare pentru y. Avem:

x	$-\infty$	-3		$-2-\varepsilon$		$-2+\varepsilon$	-1	0	1	$2-\varepsilon$		$2+\varepsilon$	3	$+\infty$
y	0	crește $\frac{1}{5}$	crește	$+\infty$		$-\infty$	crește $-\frac{1}{3}$	crește $-\frac{1}{4}$	desc. $-\frac{1}{3}$	desc.	$-\infty$	$+\infty$	desc. $\frac{1}{5}$	desc. 0



Graficul variației este cel din fig. 183.

433. Ducem prin V, vîrful piramidei, planele VMN și VPQ perpendiculare respectiv pe perechile de laturi opuse $(AD\,;\,BC)$ și $(AB\,;\,CD)$. Intersecția acestor plane este dreapta VI perpendiculară pe planul $ABCD$ și ca atare este înălțimea piramidei pe care o notăm cu h. Unghiurile VMI, VPI, VNI și VQI sînt unghiurile diedre de la bază. Dacă notăm $\widehat{VMI} = \alpha$, atunci, pe baza datelor problemei, avem:

$$\widehat{VPI} = 2\alpha\,;\ \widehat{VNI} = 4\alpha \text{ și } \widehat{VQI} = 2\alpha.$$

În triunghiurile dreptunghice VMI; VPI; VNI și VQI avem:

$\overline{MI} = h \operatorname{cotg} \alpha$; $\overline{PI} = h \operatorname{cotg} 2\alpha$; $\overline{IN} = h \operatorname{cotg} 4\alpha$ și $\overline{IQ} = h \operatorname{cotg} 2\alpha$.

Scriind că $\overline{MI} + \overline{IN} = \overline{PI} + \overline{IQ}$, rezultă ecuația trigonometrică cu necunoscuta α: $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg} 4\alpha = 2\operatorname{cotg} 2\alpha$ (1) sau, $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{cotg} 2\alpha - \operatorname{cotg} 4\alpha$, transformînd expresiile din fiecare membru după formula:

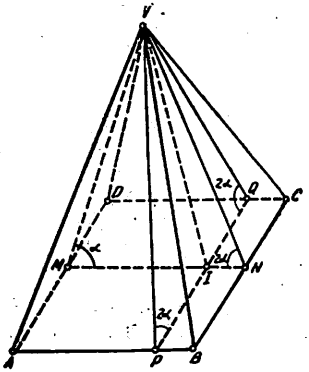


Fig. 184

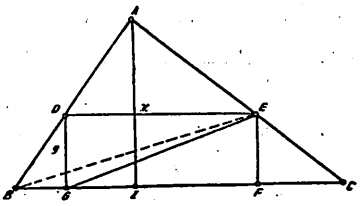


Fig. 185

$$\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$$ avem:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha},$$

care ne conduce la ecuația cu rădăcini care au sens pentru problema dată:

$$\sin 4\alpha = \sin 2\alpha$$

cu soluția potrivită $\alpha = 30°$.

Unghiurile diedre de la bază sînt deci:

$$30°; 60°; 120° \text{ și } 60°.$$

434. E vorba să construim dreptunghiul $DEFG$ pentru care diagonala $\overline{GE}$ este minimă (fig. 185). Dacă notăm cu x

și y baza și înălțimea dreptunghiului înscris în triunghiul în care baza $\overline{BC} = a$ și înălțimea $\overline{AI} = h$, atunci avem :

$$\overline{GE}^2 = x^2 + y^2.$$

Ținînd seama că :

aria ABC = aria BEC + aria ADE + aria BDE, găsim :

$$\frac{ah}{2} = \frac{ay}{2} + \frac{x(h-y)}{2} + \frac{xy}{2},$$

sau :

$$ah = hx + ay.$$

Formăm identitatea cunoscută :

$$(x^2 + y^2)(h^2 + a^2) = (hx + ay)^2 + (hy - ax)^2$$

în care înlocuim : $x^2 + y^2 = \overline{GE}^2$ și $hx + ay = ah$, obținem :

$$(h^2 + a^2) \cdot \overline{GE}^2 = (ah)^2 + (hy - ax)^2.$$

Astfel se constată că $\overline{GE}$ este minimă cînd $hy - ax = 0$, adică atunci cînd avem :

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{a} = \frac{hx + ay}{h^2 + a^2} = \frac{ah}{h^2 + a^2}$$

și deci :

$$x = \frac{ah^2}{a^2 + h^2}; \qquad y = \frac{a^2 h}{a^2 + h^2},$$

iar diagonala minimă d_{BC} corespunzătoare dreptunghiurilor cu baza pe BC este :

$$\overline{GE} = d_{BC} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{2S}{\sqrt{a^2 + h_a^2}},$$

unde S este aria triunghiului, iar $h_a = h$ înălțimea corespunzătoare laturii a.

Mai există diagonale minime corespunzătoare dreptunghiurilor cu baza pe $\overline{AC}$ și AB, pe care le notăm d_{AC}, d_{AB} și ale căror valori sînt date de :

$$d_{AC} = \frac{2S}{\sqrt{b^2 + h_b^2}} \text{ și } d_{AB} = \frac{2S}{\sqrt{c^2 + h_c^2}},$$

unde am notat cu h_a, h_b, h_c înălțimile corespunzătoare laturilor a, b, c.

Acum se vede că diagonala cea mai mică este aceea pentru care numitorul celor trei fracții este cel mai mare.

Avînd în vedere că :

$$a^2 + h^2 = (a + h)^2 - 2ah = (a + h)^2 - 4S,$$

expresia $a^2 + h^2$ este cea mai mare cînd și $a + h$ este cea mai mare.

Așadar, diagonala cea mai mică corespunde dreptunghiului cu diagonala minimă așezat cu baza pe latura pentru care suma dintre ea și înălțimea corespunzătoare este cea mai mare.

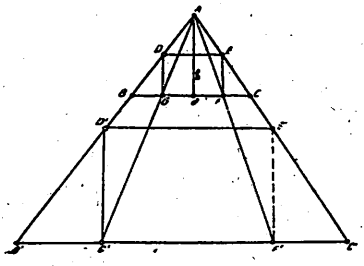


Fig. 186

Pentru a construi geometric dreptunghiul $DEFG$ cu diagonala minimă avînd baza pe latura $\overline{BC}$ (fig. 186), așezăm în unghiul BAC latura $D'E'$ paralelă cu BC și egală cu $2a$, iar în D' și E' ducem perpendicularele $\overline{D'G'} = \overline{E'F'} + 2h$ pe $D'E'$ și unim $G'F'$ pe care o prelungim pînă taie AB și AC în B' și C'. Dreptele AG' și AF' taie baza BC în G și F, de unde obținem apoi dreptunghiul $DEFG$ asemenea cu $D'E'F'G'$. Avem deci :

$$\frac{\overline{DE}\,(=x)}{\overline{D'E'}\,(=2a)} = \frac{\overline{DG}\,(=y)}{\overline{D'G'}\,(=2h)},$$

prin urmare :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{h},$$

relație care corespunde dreptunghiului cu diagonala minimă.

Observare. În loc de $2a$ și $2h$ se putea lua ka și kh unde k este un număr oarecare.

435. Egalitatea de demonstrat echivalează cu :

$$2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = -1. \qquad (1)$$

Pentru a o demonstra pe aceasta, înmulțim ambii membri cu $\sin\frac{\pi}{5}$ și avem astfel de demonstrat :

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5}. \qquad (2)$$

Înlocuind $2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)$ etc., membrul stîng devine :

$\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\pi-\sin\frac{3\pi}{5}$. Această expresie este egală cu $-\sin\frac{\pi}{5}$, adică cu valoarea din membrul drept al egalității (2), ceea ce demonstrează egalitatea propusă.

436. Să notăm cu I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC (fig. 187).

Laturile $\overline{I_bI_c}$, $\overline{I_bI_a}$, $\overline{I_aI_c}$ fiind bisectoarele unghiurilor exterioare din A, B și C trecprin aceste vîrfuri, iar unghiurile I_cAB și I_bAC sînt egale cu $90°-\frac{A}{2}$. Unghiul din vîrful I_a este egal cu $\frac{B+C}{2}$.

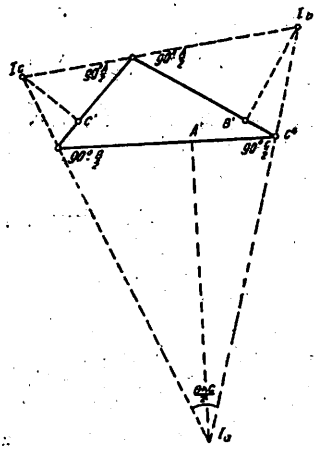


Fig. 187

Proiecțiile centrelor I_b și I_c pe laturi sînt punctele de tangență B' și C' ale cercurilor exînscrise laturilor AC și AB, de aceea avem $\overline{AB'}=p-c$ și $\overline{AC'}=p-b$ (p, semiperimetrul triunghiului cu laturile a, b, c).

Rezultă :

$$\overline{AI_c}=\frac{p-b}{\sin\frac{A}{2}} \text{ și } \overline{AI_b}=\frac{p-c}{\sin\frac{A}{2}},$$

iar $\overline{I_bI_c}=\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}$.

Raza ρ a cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ este dată de formula:

$$\rho = \frac{\overline{I_bI_c}}{2 \sin \widehat{I_a}} = \frac{a}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2}} = \frac{A}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

(R este raza cercului circumscris triunghiului ABC).
Aşadar $\rho = 2R$.

437. Înlocuind $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ şi $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, expresia devine:

$$E = a.\frac{1+\cos 2x}{2} + b \sin 2x + c\frac{1-\cos 2x}{2},$$

sau:

$$E = \frac{a+c}{2} + b\left(\sin 2x + \frac{a-c}{2b} \cos 2x\right),$$

Punem: $\frac{a-c}{2b} = \operatorname{tg}\varphi$, după care E devine:

$$E = \frac{a+c}{2} + \frac{b}{\cos\varphi} \sin (2x + \varphi).$$

Ţinînd seama că avem: $\cos\varphi = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\pm b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, rezultă:

$$E = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \sin (2x + \varphi).$$

Valoarea maximă a lui $E_{max} = \frac{a+c}{2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2}$, iar cea minimă $E_{min} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{(a-c)^2+b^2}$, care au loc pentru acele valori ale lui x pentru care avem:

$$2x + \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2},$$

adică atunci cînd avem :

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \frac{(2k+1)}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a-c}{2b}.$$

438. 1) Să desenăm cercul întreg din care face parte talpa superioară (fig. 189). Prelungim diametrul DC pînă taie cercul în I. Avem $\overline{CB}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{CI}$, de unde rezultă $\overline{CI} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{DC}} = \frac{12 \cdot 12}{5} = 28{,}8$ m.

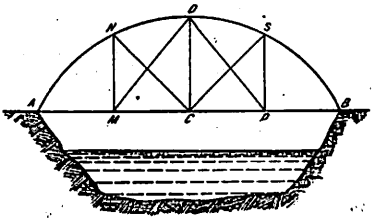


Fig. 188

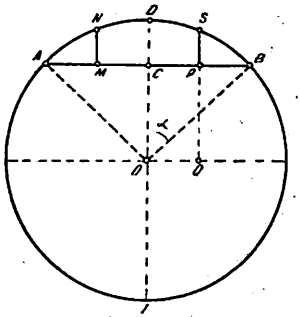


Fig. 189

Diametrul cercului este egal cu :

$$2R = \overline{DC} + \overline{CI} = 5 + 28{,}8 = 33{,}8 \text{ m}$$

și prin urmare $R = 16{,}9$ m.

2) Pentru a calcula lungimea tălpii $ANDSB$, avem nevoie de mărimea unghiului la centru 2α a acestui arc.

Avem : $\sin\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{12}{16{,}9} = \frac{120}{169}$, iar : $\alpha = 45° 14'20''$.

Urmează că lungimea tălpii este :

$$l = \frac{\pi \cdot 16{,}9 \cdot 2\,(45°14'20'')}{180} \approx 26{,}688 \text{ m}.$$

3) Montanții $\overline{MN}$ și $\overline{PS}$ sînt egali cu : $\overline{QS} - \overline{OC} = \sqrt{\overline{OS}^2 - \overline{OQ}^2} - (\overline{OD} - \overline{CD}) = \sqrt{16{,}9^2 - 6^2} - (16{,}9 - 5) \approx 15{,}79 - 11{,}9 \approx 3{,}89$ m.

439. 1) Notăm cu M' proiecția punctului M pe cateta AC (fig. 190). Triunghiul BMM' având $\overline{BM} = \overline{MM'}$ este isoscel, rezultă deci că $\hat{B}_1 = \hat{M}'_1$. Totodată avem $\hat{B}_2 = \hat{M}'_1$ pentru că $MM' \parallel BC$ și prin urmare $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Deducem modalitatea de a obține M. Se construiește bisectoarea unghiului B, iar în M', unde această bisectoare taie pe AC, ridicăm perpendiculara $M'M$.

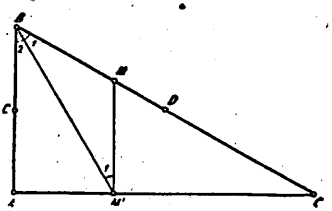


Fig. 190

Poziția lui M, prin calcul, se obține prin lungimea segmentului $\overline{BM}$.

Avem : $\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AC}}$. (1)

Aplicînd teorema bisectoarei, aflăm : $\frac{\overline{AM'}}{b} = \frac{c}{c+a}$ și deci : $\overline{AM'} = \frac{bc}{a+c}$. Din (1), aflăm :

$$\overline{BM} = \frac{a}{b} \cdot \overline{AM'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{bc}{a+c} = \frac{ac}{a+c}.$$

2) Avem : $\frac{\overline{BM}}{\overline{BD}} = \frac{ac}{a+c} : \frac{a}{2} = \frac{2c}{a+c}$.

Pentru că $c < a$, avem $2c < a + c$ și deci $\overline{BM} < \overline{BD}$. Rezultă că punctul M este întotdeauna situat între B și D, ca atare M nu poate coincide cu D.

Geometric, aceasta se explică prin faptul că segmentele $\overline{AM'}$, $\overline{M'C}$ fiind proporționale respectiv cu cateta $\overline{AB}$ și ipotenuza $\overline{CB}$, segmentul $\overline{AM'}$ este întotdeauna mai mic decît $\overline{M'C}$, deci M' este situat la stînga mijlocului segmentului $\overline{AC}$ (fig. 190). Urmează că și perpendiculara în M' va tăia pe BC întotdeauna între B și D.

3) Pentru ca M să coincidă cu piciorul înălțimii coborîte din A, trebuie să avem :

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{BC}},$$

sau : $\frac{ac}{a+c} = \frac{c^2}{a}$, de unde rezultă : $b^2 = ac$.

Pentru a calcula cos B, observăm:

$$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{\frac{b^2}{a}}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \sin^2 B.$$

Ecuaţia obţinută are soluţia acceptabilă: $\cos B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. Din relaţia: $c = a \cos B = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, deducem:

$$2c = \sqrt{(2a)^2 + a^2} - a.$$

De aci se observă că dublul catetei AB este diferenţa dintre ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catetele a şi $2a$ şi a segmentului a.

Urmează următoarea construcţie pentru un triunghi dreptunghic care îndeplineşte condiţia de sub 3), (fig. 191).

La capătul B al ipotenuzei date $\overline{BC} = a$ se ridică o perpendiculară $\overline{BM} = 2\overline{BC}$, iar din C ca centru cu raza a, tăiem pe $\overline{MC}$ în punctul N. Segmentul $\overline{MN}$ se împarte în două părţi egale prin L. Lungimea ML reprezintă cateta AB. Pe semicercul descris pe $\overline{BC}$ ca diametru purtăm din B segmentul $\overline{BA} = \overline{ML}$. Triunghiul BAC este cel căutat.

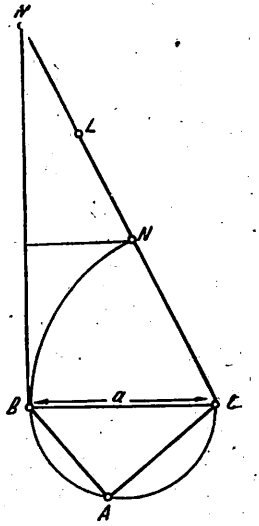


Fig. 191

440. Scriind că exponenţii puterilor lui 2 din prima ecuaţie şi acei ai lui 7 din ecuaţia a doua sînt egali (se va pune $4 = 2^2$; $32 = 2^5$; $49 = 7^2$) obţinem sistemul:

$$2x = 5\left(\frac{y}{7} - 9\right),$$

$$y + 3 - x = 3(2x + 1),$$

care are soluţia $x = 15°$ şi $y = 105°$.

a) Avem $\overline{AM} = 15°$ și $\overline{AN} = 105°$ (fig. 192) de unde rezultă (avînd în vedere că mărimea unei coarde care subîntinde un arc în cercul de rază R este egală cu $2R \sin\frac{\alpha}{2}$) că :

$$\overline{QM} = 2\sin 15°; \quad \overline{PN} = 2\sin 105°;$$

$$\overline{MN} = \overline{PQ} = 2\sin 45° = \sqrt{2}; \quad \overline{NQ} = \overline{PM} = 2\sin\frac{105° + 15°}{2} =$$

$$= 2\sin 60° = \sqrt{3}.$$

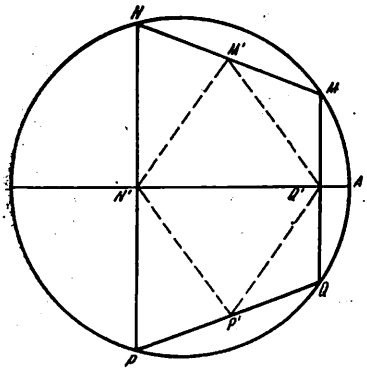


Fig. 192

Perimetrul patrulaterului : $MNPQ = 2\sin 15° + 2\sin 105° + 2\sqrt{2} = 4\sin 60°\cos 45° + 2\sqrt{2} = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$.

Aria patrulaterului : $MNPQ = \overline{N'Q'} \cdot \overline{P'M'} = (\cos 15° - \cos 105°) \cdot (\sin 105° + \sin 15°) = 4\sin^2 60° \sin = 45°\cos 45° = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$.

(M', N'. P', Q' mijloacele laturilor patrulaterului $MNPQ$).

b) Avem :

$$\frac{\text{aria } MNPQ}{\text{aria } M'N'P'Q'} = \frac{\overline{N'O'} \cdot \overline{P'M'}}{\frac{\overline{N'Q'} \cdot \overline{P'M'}}{2}} = 2.$$

441. a) Din triunghiul isoscel EBC în care avem : $\overline{EB} = \overline{BC} = a$ și $\widehat{EBC} = 60° + 90° = 150°$, rezultă :

$\overline{EC} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a\cos 150°} = \frac{a}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, iar din triunghiul FBC în care $\overline{FB} = \overline{BC} = a$ și $\widehat{FBC} = 90° - 60° = 30°$, deducem :

$$\overline{FC} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a\cos 30°} = \frac{a}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Urmează din cele spuse mai sus că avem:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{EC}{2}}{BC} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ şi } \cos\beta = \frac{\frac{FC}{2}}{BC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

şi prin urmare: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, iar $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Avem $\widehat{FCD} = 90° - \beta$, de unde rezultă $\sin\widehat{FCD} = \cos\beta = \sin\alpha$, şi deci $\widehat{FCD} = \alpha$. La fel $\widehat{DCE} = 90° - \alpha$; $\sin\widehat{DCE} = \cos\alpha \sin\beta$ şi prin urmare $\widehat{DCE} = \beta$.

b) Distanţa de la punctul E la baza BC a triunghiului EBC este $\frac{a}{2}$, rezultă deci aria $EBC = \frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$.

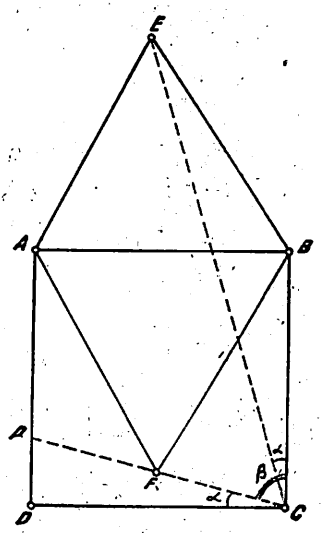


Fig. 193

Distanţa EF este dublul înălţimii triunghiului echilateral AEB, adică $a\sqrt{3}$, iar depărtarea lui C pînă la EF este $\frac{a}{2}$, urmează deci că aria $EFC = \frac{a\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Pentru a calcula perimetrul patrulaterului $APCE$ exprimăm: $\overline{PD} = \overline{DC}$ tg $\widehat{FCD} = a\,\mathrm{tg}\alpha = a\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = a(2-\sqrt{3})$ şi:

$$\overline{PC} = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{4a}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = a(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Rezultă că perimetrul patrulaterului este:

$$p = \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{CP} + \overline{PA} = a + \frac{a}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + a(\sqrt{6}-\sqrt{2}) +$$

$$+ [a - a(2-\sqrt{3})] = \frac{a}{2}(3\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

442. Avem $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$, de unde rezultă:

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = m(1 - 3\sin\alpha\cos\alpha). \qquad (1)$$

Din relaţia $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$ deducem: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{m^2-1}{2}$.

Introducem această ultimă expresie în (1) şi obţinem: $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = m\left[1 - \frac{3(m^2-1)}{2}\right] = \frac{m(5-3m^2)}{2}$.

443. Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$x + y = k\pi.$$

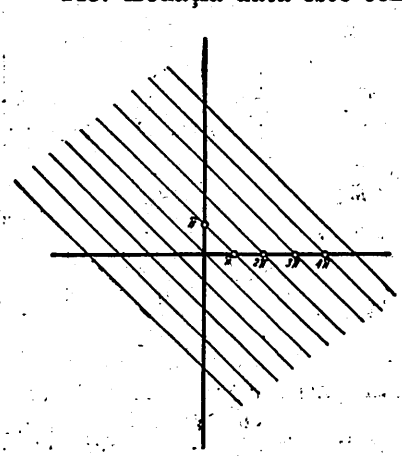


Fig. 194.

Acestea reprezintă drepte paralele cu bisectoarea a doua a axelor şi determină pe Ox şi Oy tăieturile $k\pi$. De la o dreaptă la cea următoare se trece prin mărirea tăieturilor cu π. Printre dreptele care formează locul se află şi bisectoarea a doua a axelor. În figura alăturată (fig. 194) sînt reprezentate dreptele reţelei care formează locul geometric căutat.

444. Dacă baza triunghiului este $\overline{BC} = a$ (fig. 195), atunci, conform enunţului, celelalte laturi sînt $a - d$ şi $a + d$, unde am notat cu d raţia progresiei.

Pentru a afla raza r a cercului înscris în triunghi, folosim formula :

$r = \frac{S}{p}$ (unde S e aria şi p semiperimetrul).

Avem deci :

$$r = \frac{\frac{a \cdot \overline{AD}}{2}}{\frac{a-d+a+a+d}{2}} = \frac{\overline{AD}}{3}.$$

($\overline{AD}$, înălţimea din A), ceea ce justifică afirmaţia din enunţ.

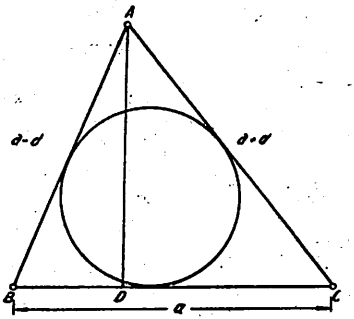


Fig. 195

445. a) Trecînd termenii din membrul drept în cel stîng, fără a elimina numitorii, obţinem :

$$\frac{x\,[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)]-(x-a)(x-b)(x-c)-abc}{x\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)} = 0,$$

sau după efectuarea reducerilor şi a simplificării prin x :

$$\frac{x^2\,[2x-(a+b+c)]}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)} = 0.$$

Rădăcinile sînt : $x = 0$ şi $x = \frac{a+b+c}{2}$.

b) Valoarea $x = 0$ deşi apare la numitorul fracţiilor din membrul drept, verifică ecuaţia, pentru că avem :

$$\frac{1}{x} + \frac{abc}{x\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)} = \frac{x^3-(a+b+c)x+(ab+ac+bc)}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)},$$

rezultat în care x a dispărut de la numitor.

c) Din rezultatul de sub a) se vede că dacă x este semiperimetrul p al unui triunghi cu laturile a, b, c, ecuația se transformă în identitate. Avem deci :

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\equiv\frac{1}{p}+\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

sau dacă înmulțim peste tot cu $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ și ținem seama că $r_a=\frac{S}{p-a}$; $r_b=\frac{S}{p-b}$; $r_c=\frac{S}{p-c}$; $r=\frac{S}{p}$ și $\frac{abc}{4S}=R$,

deducem :

$$r_a+r_b+r_c=r+4R.$$

446. Avem $\cos 20^\circ\cos 80^\circ=\frac{\cos(80^\circ+20^\circ)+\cos(80^\circ-20)}{2}=\frac{\cos 100^\circ+\cos 60^\circ}{2}$,

de unde rezultă :

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{\cos 100^\circ\cos 40^\circ+\cos 60^\circ\cos 40^\circ}{2}=$$

$$\frac{\cos 140^\circ+\cos 60^\circ+\cos 100^\circ+\cos 20^\circ}{4}=\frac{-\cos 40^\circ+\cos 60^\circ-\cos 80^\circ+\cos 20^\circ}{4}=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ+\cos 20^\circ-2\cos 60^\circ\cos 20^\circ}{4}=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ+\cos 20^\circ-2\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8},$$

ceea ce trebuia dovedit.

447. Avem :

$$E=\frac{\sin(40^\circ+13^\circ)-2\cos 40^\circ\sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}=\frac{\sin 40^\circ\cos 13^\circ-\sin 13^\circ\cos 40^\circ}{\cos 63^\circ}=$$

$$=\frac{\sin(40^\circ-13^\circ)}{\sin(90^\circ-63^\circ)}=\frac{\sin 27^\circ}{\sin 27^\circ}=1.$$

448. Dînd factor comun pe 3 şi notînd $\frac{4}{3} = \operatorname{tg} \varphi$, avem

$$y = 3\left(\sin x + \frac{4}{3}\cos x\right) = 3\left(\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos x\right) =$$

$$= \frac{3 \sin (x + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Cea mai mare valoare a lui y corespunde cazului cînd $\sin (x + \varphi)$ este maxim, adică are valoarea 1, cea ce se întîmplă cînd $x + \varphi = \frac{\pi}{2}$, adică $x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{3}$.

Valoarea maximă a lui y este

$$y_{\max} = \frac{3}{\cos \varphi} = 3\sqrt{1 + \frac{16}{9}} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5.$$

Valoarea minimă a lui y corespunde cazului cînd $\sin (x + \varphi)$ primeşte cea mai mică valoare, adică -1, ceea ce se întîmplă cînd $x + \varphi = -\frac{\pi}{2}$ sau $x = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{3}$.

Cea mai mică valoare a lui y este:

$$y_{\min} = -\frac{3}{\cos \varphi} = -5.$$

449. Egalitatea nu este posibilă. Într-adevăr, cînd α ia valori pentru care $\sin \alpha$ este pozitiv, membrul stîng e pozitiv, iar cel drept negativ ($\sin \alpha$ fiind subunitar), ceea ce este imposibil. Cînd $\sin \alpha$ este negativ, membrul stîng al egalităţii este un număr real, în timp ce membrul drept este imaginar (logaritmul unui număr negativ nu există), care de asemeni nu este posibil.

Dacă $\sin \alpha$ ar fi 1, am avea în stînga 1 şi în dreapta 0. Aşadar, oricum variază α, este imposibil să avem $\sin \alpha = \log \sin \alpha$.

450. a) Din relaţia dată, prin aplicarea unor proprietăţi ale proporţiilor, deducem:

$$\frac{\sin (a + b) + \sin (a - b)}{\sin (a + b) - \sin (a - b)} = \frac{\sin (c + d) + \sin (c - d)}{\sin (c + d) - \sin (c - d)},$$

sau :

$$\frac{2 \sin a \cos b}{2 \cos a \sin b} = \frac{2 \sin c \cos d}{2 \cos c \sin d}.$$

Această din urmă relație se mai scrie sub forma :

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\frac{\sin c}{\cos c}}{\frac{\sin d}{\cos d}}, \text{ de unde obținem } \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}. \qquad (1)$$

Punem relația (1) sub forma $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{cotg} d}{\operatorname{cotg} c}$ și aplicăm acestei proporții unele proprietăți, deducem :

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} d}{\operatorname{tg} b + \operatorname{cotg} c} = \frac{\operatorname{cotg} d - \operatorname{tg} a}{\operatorname{cotg} c - \operatorname{tg} b} \text{ sau : } \frac{\frac{\cos (a-d)}{\cos a \sin d}}{\frac{\cos (b-c)}{\cos b \sin c}} = \frac{\frac{\cos (c-d)}{\sin d \cos a}}{\frac{\cos (b+c)}{\sin c \cos b}}$$

de unde rezultă : $\frac{\cos (a+d)}{\cos (a-d)} = \frac{\cos (c+b)}{\cos (c-b)}$.

b) Avem : $E = \sin (a-b) \sin (a-c) - \cos b \cos c =$

$$\frac{\cos (a-b-a+c) - \cos (a-b+a-c)}{2} - \frac{\cos (b+c) + \cos (b-c)}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\cos (2a-b-c) + \cos (b+c)\Big] = -\cos a \cos (b+c-a).$$

451. a) Avem : $R_1 > R_2 > R_3$ și :

$$R_2 = \sqrt{R_1 R_3},$$
$$\pi (R_1^2 - R_2^2) = 18\pi,$$
$$R_1 + R_3 = 12.$$

Înlocuim $R_3 = 12 - R_1$ în prima ecuație după care obținem sistemul :

$$R_2^2 = R_1 (12 - R_1),$$
$$R_1^2 - R_2^2 = 18.$$

Adunînd aceste ultime ecuații, după reduceri și simplificări, deducem:

$$R_1^2 - 6R_1 - 9 = 0$$

cu soluția acceptabilă: $R_1 = 3(1 + \sqrt{2})$ căreia îi corespunde:

$R_3 = 12 - R_1 = 3(3 - \sqrt{2})$

și $R_2 = 3\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$.

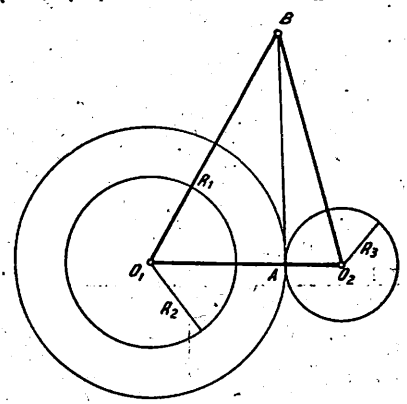


Fig. 196

c) Notăm: $\widehat{O_1BA} = \alpha$; $\widehat{ABO_2} = \beta$ și $AB = x$. Avem:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} n^0 =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{R_1}{x} + \frac{R_3}{x}}{1 - \frac{R_1 R_3}{x^2}},$$

sau: $\operatorname{tg} n^\circ = \frac{(R_1 + R_3)x}{x^2 - R_1 R_3} = \frac{12x}{x^2 - R_2^2}$,

care ne conduce la: $x^2 - 12 \operatorname{cotg} n^\circ \cdot x - R_2^2 = 0$,

cu soluția acceptabilă: $x = 6 \operatorname{cotg} n^\circ + \sqrt{36 \operatorname{cotg}^2 n^\circ + R_2^2} =$

$$= 6 \operatorname{cotg}^2 n^\circ + 3\sqrt{4 \operatorname{cotg} n^\circ + 1 + 2\sqrt{2}}.$$

b) Pentru $n^\circ = 45^\circ$ $AB = x = 6 + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

452. Să formăm ecuația care dă pe x în funcție de y:

$$yx^2 + yx + (y - 6) = 0.$$

Corespondența între x și y fiind numai între numere reale, urmează că discriminantul este pozitiv:

$$\Delta = y^2 - 4y(y - 6) = -3y^2 + 24y = -3y(y - 8) \geqslant 0.$$

Rezultă $0 \leqslant y \leqslant 8$,

deci valoarea maximă a lui y este 8 şi ea corespunde pentru $x = -\frac{1}{2}$, iar cea minimă 0 nu poate fi atinsă niciodată.

Introducînd într-un tabel diferite valori pentru x şi cele corespunzătoare pentru y obţinem coordonatele unor puncte de pe grafic.

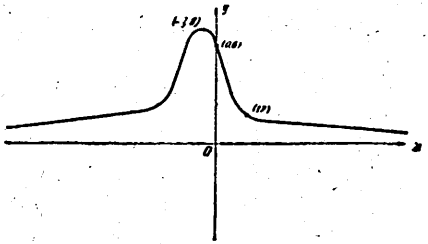


Fig. 197

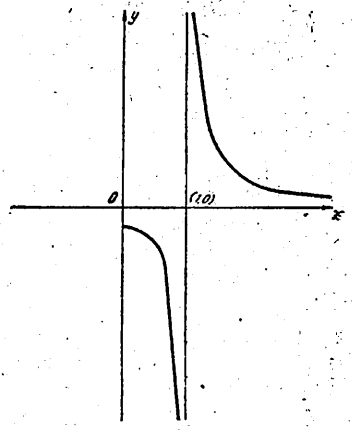


Fig. 198

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y	0 creşte		8 maxim	descreşte	6	descreşte	2	descreşte	0

Graficul variaţiei este cel dn figura alăturată (fig. 197).

453. Funcţia are sens numai dacă x este pozitiv, adică pentru x variind de la 0 la ∞. Dat fiind că numărătorul este constant şi numitorul creşte, înseamnă că funcţia descreşte.

Considerăm radicalul cu semnul + şi introducem într-un tabel diferite valori ale lui x şi cele corespunzătoare pentru y.

Avem o discontinuitate pentru $x = 1$.

x	0		$\frac{1}{4}$		1		4		9		∞
y	-1 descr.	-2 descr.	$-\infty$	$+\infty$	$+$descreşte	1	descreşte	$\frac{1}{2}$	descreşte	0	

Graficul este cel din fig. 198.

454. a) Poliedrul obținut conține cele 6 fețe ale cubului. În locul colțului A, apare fața MNP și același lucru se întîmplă în toate cele 8 colțuri ale cubului (fig. 199). Deci :

$$f = 6 + 8 = 14.$$

Colțurile cubului dispar. În locul colțului A apar colțurile M, N și P și același lucru se petrece în toate cele 8 colțuri ale cubului. Deci :

$$c = 8 \cdot 3 = 24.$$

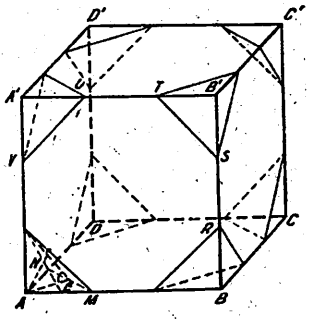


Fig. 199

Toate cele 12 munchii ale cubului rămîn. În colțul A apar 3 muchii noi : $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ și $\overline{PM}$ și același lucru se întîmplă în toate cele 8 colțuri, deci apar $8 \cdot 3 = 24$ muchii noi. Numărul total al muchiilor este :

$$m = 12 + 24 = 36.$$

Se verifică efectiv relația :

$$14 + 24 = 36 + 2 = 38.$$

De altfel, acesta este un caz particular al unei teoreme generale datorită lui Euler, care spune că, în orice poliedru, avem : $f + c = m + 2$.

b) Suprafața poliedrului se compune din 6 octogoane ca $MQRSTUVP$ și 8 triunghiuri echilaterale ca MNP.

Aria ocotogonului este aria pătratului, din care se scad 4 triunghiuri ca AMP. Aria pătratului este $(3a)^2 = 9a^2$, iar aria triunghiului AMP este $\frac{a^2}{2}$ deci aria ocotogonului este :

$$9a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{2} = 7a^2.$$

MNP este un triunghi echilateral. Latura sa se obține din triunghiul AMP.

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

iar aria sa este :

$$\frac{\overline{MP}^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Aria poliedrului este :

$$S = 6 \cdot 7a^2 - 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 42a^2 - 4a^2\sqrt{3} = 2a^2(21 - 2\sqrt{3}).$$

Volumul poliedrului este volumul cubului din care se scad 8 piramide ca $AMNP$. Cubul are volumul $(3a)^3 = 27\,a^3$, iar $AMNP$ are ca bază triunghiul dreptunghic MAN, iar ca înălțime $AP = a$; volumul său este :

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Deci, volumul poliedrului este :

$$V = 27a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{77\,a^3}{3}.$$

c) Perpendiculara coborîtă din P de pe MN cade în mijlocul bazei $\overline{MN}$, triunghiul AMN avînd $\overline{AM} = \overline{AN}$, perpendiculara ridicată pe mijlocul E al bazei trece prin A. Unghiul plan ce corespunde unghiului diedru căutat este deci $\widehat{PEA} = \alpha$. În triunghiul dreptunghic PAE, avem :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AE}}.$$

Dar $\overline{AP} = a$, iar $\overline{AE}$ este mediana triunghiului dreptunghic AMN și ca atare este egală cu jumătatea ipotenuzei $\overline{MN}$, adică :

$$\overline{AE} = \frac{\overline{MN}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ deci :}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = a : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

d) Considerăm MNP (fig. 200) ca bază a piramidei MNP, atunci distanța căutată $\overline{AF}$ va fi înălțimea piramidei. Aria bazei, este, precum am aflat mai înainte, $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Dacă notăm $\overline{AF} = x$, volumul piramidei este:

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot x.$$

Am aflat mai înainte că volumul acestei piramide este $\frac{a^3}{6}$ deci $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{a^3}{6}$, de unde:

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

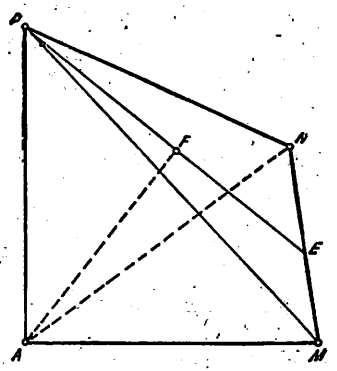


Fig. 200

Deoarece oblicele $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{AP}$ sînt egale, picioarele lor M, N, P sînt egal depărtate de piciorul perpendicularei AF. Deci F este centrul cercului circumscris triunghiului PMN. Rezultă că distanța $\overline{AF}$ mai poate fi aflată din triunghiul AFP în care ipotenuza $\overline{AP} = a$, iar cateta $\overline{PF}$ este raza cercului circumscris triunghiului echilateral PMN.

455. Luăm ca plan de desen planul determinat de statuie (redusă la o dreaptă) și ochiul observatorului (redus la un punct).

Fie $\overline{AB} = a$ soclul și $\overline{BC} = b$ statuia propriu-zisă, iar O ochiul observatorului. Punem $\overline{AO} = x$ (fig. 201). Din datele problemei rezultă că:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \alpha.$$

a) *Metoda I.* În triunghiul AOC, OB este bisectoare; teorema bisectoarei ne spune că OB împarte baza $\overline{AC}$ în părți proporționale cu laturile $\overline{OA}$ și $\overline{OC}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{x}{\overline{OC}}.$$

Teorema lui Pitagora aplicată triunghiului OAB ne dă:

$$\overline{OC} = \sqrt{(a+b)^2 + x^2}.$$

Înlocuim în proporţia de mai sus şi obţinem pe rînd:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{\sqrt{(a+b)^2 + x^2}}\ ;\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{x^2}{(a+b)^2 + x^2}\ .$$

Scădem din fiecare numitor numărătorul corespunzător:

$$\frac{a^2}{b^2 - a^2} = \frac{x^2}{(a+b)^2}\ ;\ x^2 = \frac{a^2(a+b)^2}{b^2 - a^2} = \frac{a^2(b+a)}{b-a}\ ;$$

$$x = a\sqrt{\frac{b+a}{b-a}},$$

b şi a fiind numere pozitive, numărătorul fracţiei de sub radical este totdeauna pozitiv; radicalul este real cînd $b > a$. Deci, problema are o soluţie numai atunci cînd statuia propriu-zisă este mai înaltă decît soclul.

Metoda II. Triunghiul AOB (fig. 201) ne dă:

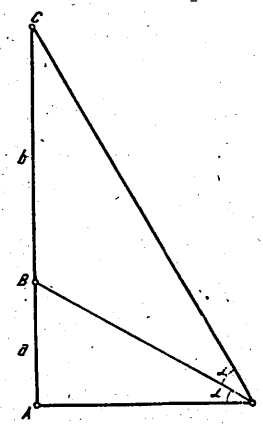


Fig. 201

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{x},$$

iar triunghiul AOC ne dă:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b+a}{x}\ .$$

Exprimăm $\operatorname{tg} 2\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$ şi înlocuim $\operatorname{tg}\alpha$ prin $\frac{a}{x}$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{b+a}{x}\ ;\ \frac{2\cdot\frac{x}{a}}{1 - \frac{a^2}{a^2}} = \frac{b+a}{x}\ .$$

Rezolvînd această ecuaţie în raport cu x, obţinem acelaşi rezultat ca mai înainte.

b) *Metoda I.* Fie P poziția a doua a observatorului (fig. 202), unde $\widehat{APC} = \alpha$. Acest unghi fiind egal cu $\widehat{BOA}$ și corespondent cu el, urmează că $PC \parallel OB$. Teorema lui Thales ne dă :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \text{ adică : } \frac{x}{\overline{OP}} = \frac{a}{b}; \text{ de unde :}$$

$$\overline{OP} = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Înlocuind aci x prin valoarea sa stabilită mai înainte, obținem :

$$\overline{OP} = b\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}.$$

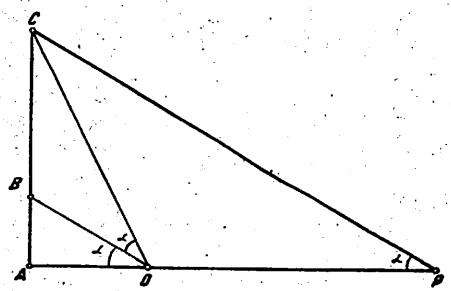


Fig. 202

Metoda II. În triunghiul POC, unghiul exterior $\widehat{AOC} = 2\ \alpha$ este dublul unghiului interior $\widehat{OPC} = \alpha$, deci acest triunghi este isoscel, adică $\overline{OP} = \overline{OC}$.

Dar :

$$\overline{OC} = \sqrt{(a+b)^2 + x^2}.$$

Rămîne să înlocuim aci x prin valoarea sa de mai înainte și obținem :

$$\overline{OP} = \sqrt{(a+b)^2 + a^2 \cdot \frac{b+a}{b-a}} = b\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}.$$

Metoda III. Triunghiul PAC dă :

$$\overline{PA} = \overline{AC} \text{ cotg } \alpha = (a+b) \text{ cotg } \alpha,$$

iar triunghiul OAB dă :

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{x}{a}.$$

deci, înlocuind iar în relația precedentă cotg α prin $\frac{x}{a}$:

$$\overline{PA} = (a + b) \cdot \frac{x}{a} \text{ și :}$$

$$\overline{OP} = \overline{PA} - \overline{CA} = (a + b)\frac{x}{a} - x = x\left(\frac{a+b}{a} - 1\right) = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Înlocuind aci x prin valoarea sa aflată la punctul a, rămîne :

$$\overline{OP} = b\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}.$$

456. Înlocuind în relația dată $a = 2R \sin A$ și $b = 2R \sin B$ (unde R este raza cercului circumscris) ea devine după simplificare cu $4R^2$:

$$(\sin^2 A + \sin^2 B) \sin (A - B) = (\sin^2 A - \sin^2 B) \sin (A + B). \quad (1)$$

Avînd în vedere că : $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A + B) \sin (A + B)$;

$\sin (A + B) = \sin C$; $\cos (A + B) = -\cos C$ și $\sin^2 A +$

$$+ \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} = \frac{2 - 2\cos(A+B)\cos(A-B)}{2} =$$

$= 1 + \cos C \cos (A - B)$, relația (1) devine :

$$[1 + \cos C \cos (A - B)] . \sin (A - B) = \sin^2 C \sin (A - B). \quad (2)$$

Relația obținută atrage după sine $\sin (A - B) = 0$, ceea ce este posibil numai cînd $A = B$ (A și B fiind unghiurile unui triunghi), adică atunci cînd triunghiul este isoscel, sau :

$$1 + \cos C \cos (A - B) = \sin^2 C,$$

adică : $1 - \sin^2 C + \cos C \cos (A - B) = 0$,

de unde rezultă : $2 \cos C \cos \frac{C+A-B}{2} \cos \frac{C+B-A}{2} = 0$ (3)

Înlocuind $A + C = 180° - B$ și $B + C = 180° - A$, deducem :

$$2 \cos C \sin B \sin A = 0,$$

care atrage după sine : $C = 90°$, sau $A = 0$, sau $B = 0$.

Singura condiție cu sens este $C = 90°$, adică atunci cînd triunghiul este dreptunghic.

457. Putem scrie:

$$E = \sin nA + \sin nB + \sin nC = 2 \sin \frac{n(A+B)}{2} \cos \frac{n(A-B)}{2} +$$

$$+ 2 \sin \frac{nC}{2} \cos \frac{nC}{2} .$$

Avînd în vedere că: $n = 2k + 1$ și $A + B + C = \pi$, rezultă: $\sin \frac{n(A+B)}{2} = \sin \frac{n(\pi - C)}{2} = \sin \left(n. \frac{\pi}{2} - \frac{nC}{2} \right) =$

$= \sin n. \frac{\pi}{2} \cos \frac{nC}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2}$. Pentru că: $\sin n. \frac{\pi}{2} =$

$= \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} = \sin \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin k\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos k\pi \sin \frac{\pi}{2} =$

$= \cos k\pi = (-1)^k = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ și în mod analog:

$$\sin \frac{nC}{2} = \sin \frac{n[\pi - (A+B)]}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n(A+B)}{2} .$$

Înlocuind în (1) expresiile obținute, deducem:

$$E = 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2} \cos \frac{n(A-B)}{2} + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n(A+B)}{2} \cdot \cos \frac{nC}{2} =$$

$$= 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2} \left[\cos \frac{n(A+B)}{2} + \cos \frac{n(A-B)}{2} \right],$$

sau:

$$E = 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2} \cdot 2 \cos \frac{\frac{n(A+B)}{2} + \frac{n(A-B)}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{n(A+B)}{2} - \frac{n(A-B)}{2}}{2} .$$

Rezultă, în sfîrșit:

$$E = 4(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nA}{2} \cos \frac{nB}{2} \cos \frac{nC}{2} ,$$

ceea ce trebuia arătat.

458. După rotirea grinzii $\overline{CD} = a$ cu unghiul $\widehat{MIC'} = \varphi$ (fig. 203), ea se ridică de la poziția inițială cu distanța LI pe care o notăm x (I mijlocul grinzii în poziția ridicată $C'D'$). Triunghiul MIC' este isoscel cu $\overline{MI} = \overline{CI} = \frac{a}{2}$ și $\widehat{MIC'} = \varphi$ rezultă $\overline{MC'} = a \sin \frac{\varphi}{2}$.

Avînd în vedere că lungimea cablului $\overline{AC} = b$ rămîne aceeași și în poziție ridicată, avem și $\overline{AC'} = b$.

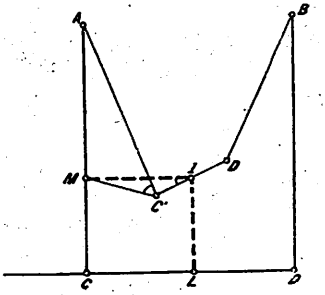


Fig. 203

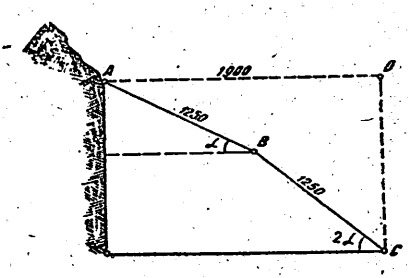


Fig. 204

Din triunghiul dreptunghic AMC' avem: $\overline{AM}^2 = \overline{AC'}^2 - \overline{MC'}^2 = b^2 - a^2 \sin \frac{\varphi}{2}$; prin urmare: $x = \overline{LI} = \overline{CM} = \overline{AC} - \overline{AM} = b - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$.

459. Scriem că proiecția curului ABC pe orizontală este egală cu $\overline{AD}$ și obținem ecuația:

$$1250 \cos \alpha + 1250 \cos 2\alpha = 1900,$$

sau: $2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2{,}52 = 0$,

care ne conduce la: $\cos \alpha = \frac{-1 \pm 4{,}6}{4}$.

Soluția reală o dă: $\cos \alpha = \frac{-1+4{,}6}{4} = 0{,}9$, căreia îi corespunde: $\alpha \approx 25^\circ\ 50'$.

460. 1) Presupunem statuia $\overline{DE}$ așezată pe soclul $DCBA$ perpendiculară pe DE (fig. 205).

Avem $\overline{DA} - \overline{DB} = 5 \operatorname{cotg} \alpha - 5 \operatorname{cotg} 2\alpha = 13$,

sau : $\dfrac{5 \sin \alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} = 13$,

de unde rezultă : $\sin 2\alpha = \dfrac{5}{13}$.

Din relația $\sin 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \dfrac{5}{13}$, deducem tg α egală cu 5 sau $\dfrac{1}{5}$. În cazul cînd am lua pentru tg α valoarea 5, unghiul α ar fi mai mare ca 90° ceea ce este imposibil. Rezultă că singura valoare acceptabilă este :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}.$$

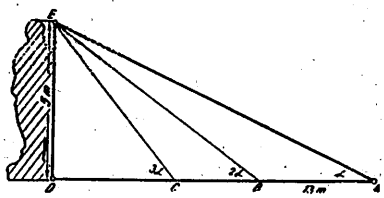


Fig. 205

2) Să presupunem C poziția de unde statuia se vede sub unghiul 3 α.

Avem : $AC = 5 (\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} 3\alpha) = \dfrac{5 \sin 2\alpha}{\sin \alpha \sin 3\alpha} = \dfrac{10 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}$,

sau $\overline{AC} = \dfrac{\dfrac{10 \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \dfrac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \alpha} = \dfrac{10}{3 \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

Înlocuim în expresia obținută, tg $\alpha = \dfrac{1}{5}$ și obținem :

$$\overline{AC} = \frac{650}{37} = 17 \frac{21}{37} \text{ m}.$$

Aceasta este distanța cu care trebuie să ne apropiem de statuie pentru a o vedea sub un unghi de trei ori mai mare ca acel sub care se vede din A.

461. 1) Avem : $\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AE}\cos 60° =$
$= 20^2 + 15^2 - 2\cdot 20\cdot 15\cdot\frac{1}{2} = 325,$
deci : $\overline{BE} = 5\sqrt{13}$.

2) Unghiul diedru este $\widehat{CDE}$ (fig. 206) pentru că $AD \perp DC$ şi $AD \perp DE$, iar acesta este suplimentul unghiului $BDE = u$.

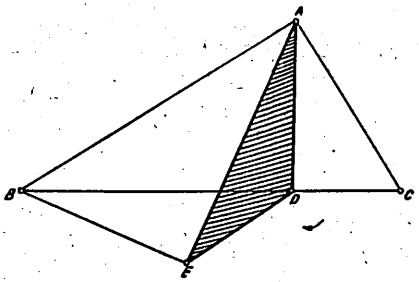


Fig. 206

Avem :

$$\cos u = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{BE}^2}{2\cdot\overline{BD}\cdot\overline{DE}}.$$

Din triunghiul dreptunghic ABC rezultă : $\overline{BC} = 25$;

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}} = \frac{400}{25} = 16$$

şi $\overline{DC} = \overline{DE} = 9$.

Urmează deci :

$$\cos u = \frac{16^2 + 9^2 - (\sqrt{5}\sqrt{13})^2}{2\cdot 16\cdot 9} = \frac{12}{2\cdot 16\cdot 9} = \frac{1}{24},$$

iar

$$u = \text{arc cos}\,\frac{1}{24} \text{ şi } \widehat{EDC} = \pi - \text{arc cos}\,\frac{1}{24}.$$

3) Volumul tetraedrului $ABED$ este egal cu :

$$V = \frac{1}{3}\cdot\overline{AD}\cdot\text{aria } BDE,$$

sau :

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{BC}\cdot\frac{\overline{DB}\cdot\overline{DE}\sin u}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{20\cdot 15}{25}\cdot\frac{16\cdot 9}{2}\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{24^2}} = 60\sqrt{23}.$$

4) Notăm distanţa de la punctul D la ABE cu d. Avem :

$$\frac{\text{aria } ABE\cdot d}{3} = V$$

și prin urmare :

$$d = \frac{3V}{\text{aria } ABE} = \frac{3 \cdot 60\sqrt{23}}{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AE} \sin 60°}{2}} = \frac{3 \cdot 60\sqrt{23} \cdot 4}{20 \cdot 15\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{69}}{5}.$$

462. 1) Avem $\overline{AO}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{PO}^2$ (fig. 207) de unde rezultă : $\overline{AO} = \sqrt{l^2 - h^2}$, iar $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AO}\sqrt{3} = \sqrt{3(l^2 - h^2)}$.

Pentru $h = 0$; $\overline{AB} = \sqrt{3}\, l^2 = l\sqrt{3}$, ceea ce se întîmplă cînd vîrful trepiedului vine la pămînt și atunci un picior devine rază a triunghiului de bază, prin urmare $\overline{AB} = \overline{PO}\sqrt{3} = l\sqrt{3}$.

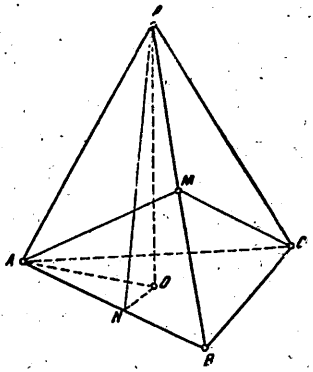


Fig. 207

2) Din relația :

$$\cos u = \frac{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AP} \cdot \overline{BP}}$$

rezultă :

$$\cos u = \frac{3h^2 - l^2}{2l^2}.$$

Dacă $u = 90°$, atunci $3h^2 - l^2 = 0$ sau $l = h\sqrt{3}$, iar $\overline{AB} = h\sqrt{6}$.

Cînd $u = 90°$ triedrul P devine tridreptunghic, iar h se calculează din triunghiul dreptunghic POA în care se știe :

$$\overline{AP} = l \text{ și } \overline{OA} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ (pentru că } \widehat{APB} = 90°).$$

Rezultă :

$$h^2 = l^2 - \frac{2l^2}{3} = \frac{l^2}{3} \text{ sau } l = h\sqrt{3}.$$

3) Avem $\cos u = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2$. Pentru ca unghiul u să fie maxim trebuie ca expresia lui $\cos u$ să fie minimă, ceea ce se

întîmplă cînd $\frac{h}{l} = 0$, adică atunci cînd $h = 0$. Punctul P se află în acest caz în planul bazei ABC.

Unghiul maxim poate fi obținut și fără calcul, observînd că suma fețelor triedrului este mai mică de 360° și că această sumă atinge maximum cînd

$$3u = 360°,$$

adică $u = 120°$; ceea ce are loc cînd P se află în planul bazei ABC.

4) Pentru a calcula unghiul planelor PBA și PAC, coborîm din A și C perpendiculare pe muchia $\overline{PB}$. Aceste perpendiculare se întîlnesc în același punct M. Unghiul v al planelor este egal cu unghiul segmentelor egale $\overline{AM}$ și $\overline{MC}$.

Avem:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{AM} \cdot \overline{MC} \cos v, \text{ sau}$$

$$\cos v = \frac{2\overline{AM}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AM}^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}\right)^2.$$

Avînd în vedere că triunghiul dreptunghic MAB este asemenea cu PNB (unde N este piciorul perpendicularei din P pe latura AB) rezultă:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PN}} = \frac{2l}{\sqrt{l^2+3h^2}}.$$

Prin urmare:

$$\cos v = 1 - \frac{2l^2}{l^2+3h^2}.$$

Pentru ca $v = 90°$, trebuie $2l^2 = l^2 + 3h^2$ sau $l = h\sqrt{3}$.

Rezultatul este același ca sub 2) unde am găsit că triedrul este tridreptunghic și este explicabil că sub 4) am găsit același rezultat, pentru că dacă $v = 90°$ triedrul tot tridreptunghic devine.

463. Înmulţim ambii membri prin $2 \sin \frac{\pi}{n}$:

$$2S \sin \frac{\pi}{n} = 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) +$$

$$+2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \left(\alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + \cdots + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \left[\alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right].$$

Transformînd produsele în diferenţe de sinusuri, obţinem :

$$2S \sin \frac{\pi}{n} = \left[\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{n} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) \right] +$$

$$+ \left[\sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{n} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{n} \right) \right] + \left[\sin \left(\alpha + \frac{5\pi}{n} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{n} \right) \right] +$$

$$+ \ldots + \left\{ \sin \left[\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n} \right] - \sin \left[\alpha + \frac{(2n-3)\pi}{n} \right] \right\}$$

După efectuarea reducerilor, ajungem la rezultatul :

$$2S \sin \frac{\pi}{n} = \sin \left[\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n} \right] - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) = 2 \sin \pi \cos \left[\alpha + \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

Deducem pentru $n > 1$:

$$2S \sin \frac{\pi}{n} = 0$$

sau $S = 0$, ceea ce trebuia dovedit.

464. Avem :

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2x_{n-1}} \text{ şi } x_n + \sqrt{2} = \frac{(x_{n-1} + \sqrt{2})^2}{2x_{n-1}},$$

de unde rezultă :

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1} + \sqrt{2}} \right)^2$$

şi din aproape în aproape :

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{2}}{x_0 + \sqrt{2}} \right)^{2^n}.$$

Aplicînd o proprietate a proporțiilor, aflăm :

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{(x_n+\sqrt{2})-(x_n-\sqrt{2})} = \frac{(x_0-\sqrt{2})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{2})^{2^n}-(x_0-\sqrt{2})^{2^n}},$$

sau :

$$\frac{x_n-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\dfrac{(x_0-\sqrt{2})^{2^n}}{(x_0-\sqrt{2})^{2^n}}}{\dfrac{(x_0+\sqrt{2})^{2^n}}{(x_0-\sqrt{2})^{2^n}}-\dfrac{(x_0-\sqrt{2})^{2^n}}{(x_0-\sqrt{2})^{2^n}}} = \frac{1}{\left(\dfrac{x_0+\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^n}-1}.$$

Deducem, în sfîrșit :

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(1+\dfrac{2\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^n}-1}.$$

Pentru $n = 36$, avem :

$$x_{36} - \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(1+\dfrac{2\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}}-1}.$$

Să apreciem această diferență.
Observăm că :

$$E = \frac{x_0-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{10^9}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{10^9\sqrt{2}}{4} - 0{,}5 = 10^7 \cdot 25\sqrt{2} - 0{,}5$$

sau :

$$\frac{x_0-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx 10^7 \cdot 25 \cdot 1{,}4 - 0{,}5 \approx 350\,000\,000.$$

Expresia E se plasează între două puteri consecutive ale lui 2 :

$$2^{28} < E < 2^{29}$$

de unde rezultă :

$$\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}} > \left(1+\frac{1}{2^{29}}\right)^{2^{36}} = \left[\left(1+\frac{1}{2^{29}}\right)^{2^{29}}\right]^{2^{36}-2^{29}}.$$

Avînd în vedere că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$, pentru orice $n > 1$, ceea ce reiese imediat din neegalitatea $(1+x)^n > 1+nx$ în care se pune $x = \frac{1}{n}$, rezultă:

$$\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}} > 2^{2^{36}-29} = 2^{128} > (2^{10})^{12} > (10^3)^{12} = 10^{36}.$$

Urmează că:

$$x_{36}-\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}}-1} < \frac{2\sqrt{2}}{2^{128}-1} < \frac{2\sqrt{2}}{10^{36}-1}$$

sau: $x_{36}-\sqrt{2} < \frac{2\sqrt{2}+1}{10^{36}}$ $\left(\text{pentru că } \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \text{ cînd } a < b\right)$.

Prin urmare: $x_{36}-\sqrt{2} < 3{,}82\cdot 10^{-36} < 10\cdot 10^{-36} = 10^{-35}$, cu atît mai mult:

$$x_{36}-\sqrt{2} < 10^{-9}.$$

465. Dreapta MP trece prin mijlocul I al muchiei $\overline{AB}$, iar triunghiul ABP este isoscel ($\overline{AP} = \overline{BP}$) (fig. 208).

Înălțimea $\overline{VG}$ trece prin centrul G de greutate al triunghiului ABC situat pe mediana IC.

Ducem din G o paralelă GL la IP. Deoarece $\overline{GC} = 2\,\overline{GI}$, avem $\overline{CL} = 2\overline{PL}$ și pentru că M este mijlocul segmentului $\overline{VG}$, rezultă că $\overline{VP} = \overline{PL}$.

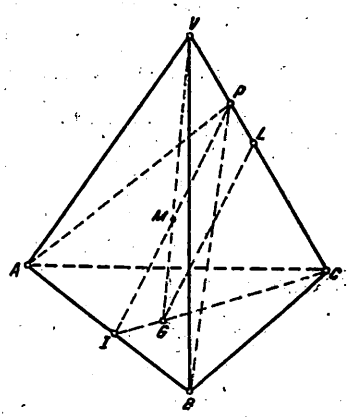


Fig. 208

Avînd în vedere că $\overline{VC} = a$, deducem: $\overline{VP} = \frac{a}{4}$ și $PC = \frac{3a}{4}$.

Aplicînd relația lui Stewart în triunghiul VAC, obținem:

$$\overline{AP}^2 \cdot a = a^2 \cdot \frac{3a}{4} + a^2 \cdot \frac{a}{4} - \frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a = \frac{13a^3}{16},$$

sau

$$\overline{AP} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Laturile triunghiului APB sînt deci :

$$\overline{AB} = a \text{ și } \overline{AP} = \overline{BP} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

466. Cele două vehicule care pleacă în același moment se întîlnesc după t ore în punctul I (fig. 209). Biciclistul care a plecat din M cu o viteză pe care o notăm cu x a parcurs drumul $\overline{MI} = xt$, iar automobilul descrie lungimea $\overline{OI} = vt$.

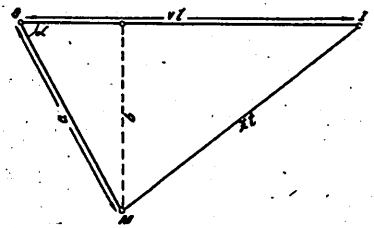


Fig. 209

Notînd cu α unghiul MOI, avem :

$$(xt)^2 = a^2 + (vt)^2 - 2a\,vt\cos\alpha,$$

sau : $x^2 = \frac{a^2}{t^2} - \frac{2av\cos\alpha}{t} + v^2$. (1)

În relația (1) punem în evidență pătratul binomului $\frac{a}{t} - v\cos\alpha$, după care relația devine :

$$x^2 = \left(\frac{a}{t} - v\cos\alpha\right)^2 + v^2\sin^2\alpha.$$

Pentru ca viteza x să fie minimă, trebuie ca expresia variabilă pozitivă $\left(\frac{a}{t} - v\cos\alpha\right)^2$, care se adună numărului pozitiv $v^2\sin^2\alpha$, să fie cît mai mică posibilă, adică zero :

$$\frac{a}{t} - v\cos\alpha = 0,$$

care ne dă $t = \frac{a}{v\cos\alpha}$ și căruia îi corespunde valoarea minimă a vitezei $x = v\sin\alpha = \frac{vb}{a}$.

467. Relaţia dată este echivalentă cu :

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\sin A \cos B}{\sin B \cos A},$$

sau cu $\sin^2 A \sin B \cos A - \sin A \sin^2 B \cos B = 0$.

Dînd factor comun şi ţinînd seama că $\sin A \cos A = \frac{\sin 2A}{2}$ etc.

avem : $\frac{1}{2} \sin A \sin B (\sin 2A - \sin 2B) = 0$

sau : $\sin A \sin B (A - B) \cos (A + B) = 0$.

Relaţia obţinută este verificată cînd avem :

$A = 0$ sau $B = 0$ sau $A - B = 0$ sau $A + B = 90°$.

Excluzînd primele două cazuri, pentru că unghiurile unui triunghi nu pot fi nule, rezultă că relaţia este verificată numai dacă :

1) $A = B$, triunghiul este isoscel, iar cînd

2) $A + B = 90°$, triunghiul este dreptunghic.

468. Fie dată secţiunea axială ABC (fig. 210) în conul circular. Secţiunea în sferă este reprezentată prin cercul O tangent generatoarei AC în T, iar bazei BC în A'. Notăm cu g generatoarea $\overline{AC}$ a conului şi cu x unghiul format de generatoare cu baza,

Avem : $\overline{A'C} = g \cos x$ şi $\overline{AA'} = g \sin x$.

Din asemănarea triunghiurilor AOT şi $AA'C$, rezultă

$$\frac{\overline{AO} + \overline{OT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{AC} + \overline{A'C}}{\overline{A'C}} \text{ sau : } \frac{\overline{AA'}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{AC} + \overline{A'C}}{\overline{A'C}}.$$

Urmează deci că avem :

$$\frac{g \sin x}{\overline{OT}} = \frac{g(1+\cos x)}{g \cos x}, \text{ iar } \overline{OT} = \frac{g \sin x \cos x}{1 + \cos x}.$$

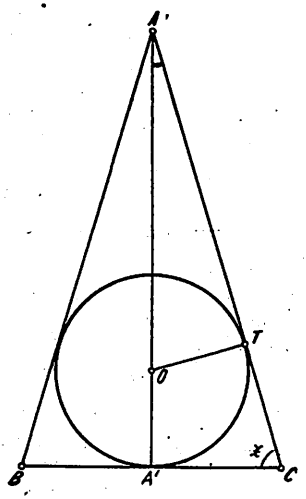


Fig. 210

Scriem acum că aria sferei este media aritmetică dintre aria bazei conului și aria laterală a aceluiași con; obținem relația : $8 \cdot \overline{OT}^2 = \overline{A'C} \cdot (\overline{A'C} + \overline{AC})$.

După înlocuirea segmentelor $\overline{OT}$, $\overline{A'C}$ și $\overline{AC}$ și simplificarea cu g^2, deducem ecuația trigonometrică :

$$8 \sin^2 x \cos^2 x = \cos x (1 + \cos x)^3,$$

sau : $8 (1 - \cos x)(1 + \cos x) \cos^2 x = \cos x (1 + \cos x)^3$.

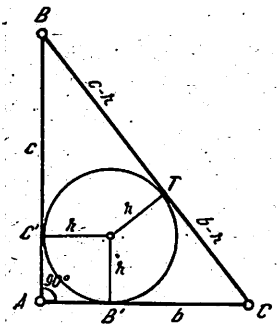


Fig. 211

După simplificarea cu $\cos x (1 + \cos x)$ (se pierd rădăcini fără semnificație pentru problemă), obținem ecuația : $9 \cos^2 x - 6 \cos x + 1 = 0$ sau : $(3 \cos x - 1)^2 = 0$, care dă : $\cos x = \frac{1}{3}$ și prin urmare : $x = 70°31'43''$.

469. Fie triunghiul dreptunghic ABC (fig. 211) cu laturile a, b, c. Notăm cu r raza cercului înscris și cu R raza cercului circumscris. Avem

$$r = \frac{b+c-a}{2} \text{ și } R = \frac{a}{2}.$$

Rezultă : $\frac{r}{R} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 = \sin B + \sin C - 1$, sau :

$$\frac{r}{R} = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = \sqrt{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1.$$

Din rezultatul obținut se vede că $\frac{r}{R}$ este maxim atunci cînd și $\cos \frac{B-C}{2}$ are valoarea maximă, adică 1, ceea ce se întîmplă cînd $\frac{B-C}{2} = 0$.

Urmează că unghiurile triunghiului dreptunghic în care raportul $\frac{r}{R}$ este maxim sînt : 45°, 45° și 90°.

470. Relaţia dată se mai poate scrie succesiv şi astfel: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1)$, sau: $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$.

De unde rezultă: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(-\gamma)$.

Din această relaţie se vede că arcele $\alpha + \beta$ şi $-\gamma$ au aceeaşi tangentă; deducem astfel:

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi.$$

471. Dacă notăm $\overline{MF'} + \overline{MF} + \overline{F'F} = 2a + 2c = 2p$, atunci avem:

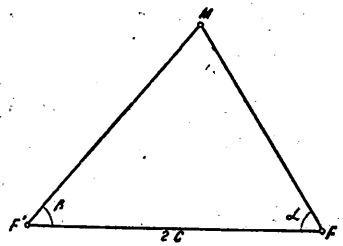


Fig 212.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-\overline{FC})(p-2c)}{p(p-\overline{F'C})}} \cdot \sqrt{\frac{(p-\overline{F'C})(p-2c)}{p(p-\overline{FC})}}.$$

Efectuînd simplificările, obţinem:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{p-2c}{p} = \frac{a+c-2c}{a+c} = \frac{a-c}{a+c},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

472. Pentru ca y să fie număr real, trebuie să avem simultan:

$$4 - x^2 \geqslant 0 \quad \text{şi} \quad -1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1.$$

Prima neegalitate este satisfăcută pentru valorile lui x pentru care avem: $-2 \leqslant x \leqslant 2$, iar a doua pentru:

$$x \leqslant -1 \text{ sau } x \geqslant 1.$$

De unde rezultă că y este real cînd avem.

$$-2 \leqslant x \leqslant -1 \text{ sau } 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

473. Să presupunem dat pătratul $ABCD$ cu latura $\overline{AB} = a$ (fig. 213). Un pătrat înscris $MNPQ$ implică ca $\overline{MB} = \overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QA}$. Într-adevăr, triunghiurile dreptunghice MBN și NCP au unghiurile BMN și CNP egale ca având același complement pe BNM și aceeași ipotenuză $\overline{MN} = \overline{NP}$, rezultă deci că $\overline{MB} = \overline{NC}$. La fel se arată că $\overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QA}$.

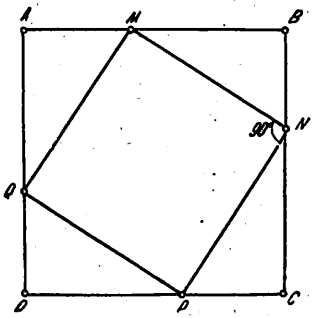


Fig. 213.

Să găsim acum pătratul minim. Notînd $\overline{AM} = x$, avem $\overline{AQ} = \overline{MB} = a - x$ și prin urmare aria pătratului $MNPQ$ este $S = \overline{MQ}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AQ}^2 = x^2 + (a - x)^2 =$

$$= 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right].$$

Din expresia pentru S se vede că avem S minim, cînd $x = \frac{a}{2}$.

Așadar, pătratul înscris, de arie minimă, este cel care unește mijloacele laturilor pătratului dat.

Așa fiind, suma ariilor tuturor pătratelor înscrise este:

$$E = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \ldots,$$

care fiind o progresie geometrică nelimitată, cu rația $\frac{1}{2}$, are limita:

$$E = \frac{\frac{a^2}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = a^2,$$ adică tocmai aria pătratului $ABCD$.

Cînd $a = 1$, ca în problemă, atunci $E = 1$.

474. Din ecuație, deducem:

$$\sin(xy) = -\frac{1 + x^2}{2x}.$$

Avînd în vedere că $\sin(xy) \leqslant 1$ şi că $1 + x^2 \geqslant \pm 2x$ rezultă că singurele valori ale lui x care verifică ecuaţia sînt cele date de:

$$1 + x^2 = \pm 2x$$

adică: $x = \pm 1$.

1) Pentru $x = -1$, avem $\sin(-y) = 1$ şi prin urmare $y = \frac{(4k+3)\pi}{2}$, unde este un întreg pozitiv sau negativ, inclusiv 0.

2) Pentru $x = 1$, avem $\sin y = -1$ care dă aceeaşi soluţie pentru y ca şi la punctul precedent.

Aşadar, singurele soluţii reale care satisfac ecuaţia dată sînt:

$$x = \pm 1 \text{ pentru care } y = \frac{(4k+3)\pi}{2}.$$

475. Dăm factor comun $\sin x \cos x$, obţinem:

$$\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$$

sau:
$$\frac{\sin 2x}{2} \cdot \cos 2x = -\frac{1}{4}$$

şi apoi: $2 \sin 2x \cos 2x = -1$,
sau: $\sin 4x = -1$,

de unde rezultă: $4x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

şi prin urmare: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$,

unde k este un număr întreg pozitiv sau negativ.

476. Din relaţia dată rezultă:

$$x + y = \frac{(2k+1)\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

unde k este un număr întreg pozitiv sau negativ.

Ecuaţia (1) reprezintă drepte paralele cu bisectoarea a doua a axelor $x + y = 0$ şi care determină pe Ox şi Oy tăieturile $k\pi + \frac{\pi}{2}$.

De la dreapta corespunzătoare valorii k la cea corespunzătoare valorii $k + 1$ se trece mărind lungimea tăieturilor cu π.

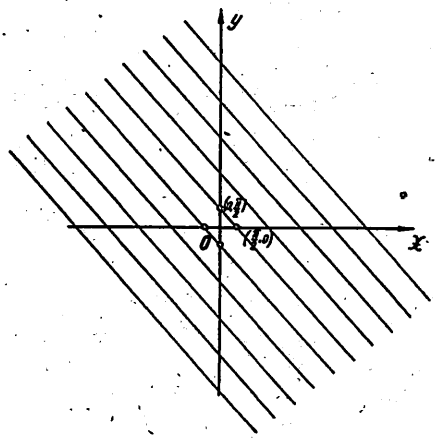


Fig. 214.

Aşa fiind, locul geometric al punctelor de coordonate x şi y care satisfac ecuaţia $\cos(x + y) = 0$ este reţeaua de drepte din figura 214.

477. Cînd x ia toate numerele reale posibile, y primeşte numai valori reale. Dacă exprimăm x în funcţie de y, trebuie ca x să fie real pentru diversele valori ale lui y real. Aceasta înseamnă că discriminantul ecuaţiei :

$$x^2y - x + y = 0$$

trebuie să fie pozitiv, sau cel puţin egal cu 0 :

$$1 - 4y^2 \geqslant 0.$$

De unde rezultă :

$$-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}.$$

Urmează că valoarea maximă a lui y este $\frac{1}{2}$, iar cea minimă $-\frac{1}{2}$.

Maximum are loc cînd $x = 1$ şi minimum cînd $x = -1$.

478. Expresia $\frac{|x|}{x}$ are întotdeauna valoarea absolută 1 şi anume cînd $x \leqslant -1$, $y = -1$, iar cînd $x \geqslant 1$ avem $y = 1$.

Dacă $|x| < 1$, înseamnă că x variază între -1 și 1, iar $y = x^3$ crește de la -1 la $+1$, atunci cînd x crește de la -1 la $+1$.

Să introducem într-un tabel constatările de mai sus :

	$\underbrace{\quad}_{\lvert x\rvert \geqslant 1}$			$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\lvert x\rvert \leqslant 1}$			$\underbrace{\quad}_{\lvert x\rvert \geqslant 1}$	
x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
y	$\underbrace{-1-1-1-1}_{\text{mereu } -1}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$\underbrace{1\,1\,1\,1\,1\,1}_{\text{mereu } 1}$	

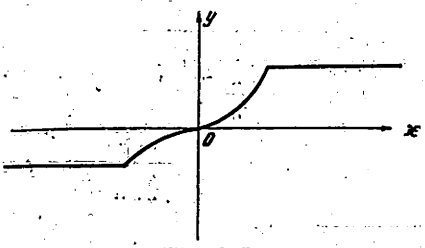


Fig. 215.

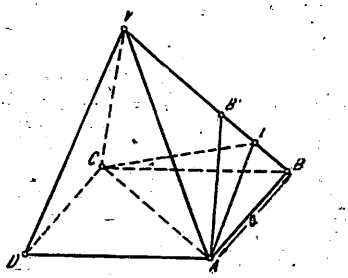


Fig. 216

Pe baza tabelului, alcătuim graficul următor :

479. Ducînd din A și C (fig. 216) perpendicularele pe VB, una din muchiile piramidei, ele se întîlnesc în același punct I. Unghiul AIC format este tocmai α. În triunghiul isoscel AIC se cunoaște baza $\overline{AC}$ (diagonala pătratului bazei $= a\sqrt{2}$) și unghiul de la vîrf α. Avem :

$$2\,\overline{AI}\,\sin\frac{\alpha}{2} = \overline{AC},\ \text{rezultă deci :}$$

$$h = \overline{AI} = \frac{a\sqrt{2}}{2\,\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Să determinăm una din muchiile laterale ale piramidei. Luăm simetricul B' al lui B față de I. Triunghiul $B'AB$ format

este isoscel și asemenea cu VAB, avînd aceleași unghiuri, rezultă :

$$\frac{\overline{BB'}}{a} = \frac{\overline{AB}}{\overline{VA}} \text{ sau : } \frac{2\sqrt{a^2-h^2}}{a} = \frac{a}{\overline{VA}}$$

și prin urmare : $\overline{VA} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-h^2}}$.

Avînd expresia muchiei $\overline{VA}$ și a razei pătratului bazei $\frac{a}{\sqrt{2}}$, putem determina înălțimea piramidei H din relația $H^2 = \overline{VA}^2 - \frac{a^2}{2}$.

Rezultă : $H = \frac{a\sqrt{2h^2-a^2}}{2\sqrt{a^2-h^2}}$, iar volumul piramidei :

$$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{2h^2-a^2}{a^2-h^2}} = \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2} - 2}$$

Înlocuind în această ultimă expresie pe h cu $\frac{a}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$, obținem :

$$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1} - 2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{\cos(180^\circ-\alpha)}}.$$

480. Expresia dată se transformă în produs. Avem :

$$y = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2},$$

sau : $y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Expresia obținută are valoarea maximă atunci cînd și $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ este maxim, ceea ce se întîmplă cînd arcul are valoarea zero, adică atunci cînd $x=\frac{\pi}{4}$.

481. Transformînd $\operatorname{tg}(x-a)+\operatorname{tg}(x+a)$ în expresie calculabilă prin logaritmi, E devine :

$$E=\frac{\frac{\sin 2x}{\cos(x+a)\cos(x-a)}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin(x-a)\sin x\sin(x+a)}{\cos(x-a)\cos x\cos(x+a)}}=\frac{\sin 2x\cos x+\sin x\cos(x-a)\cos(x+a)}{\sin(x-a)\sin x\sin(x+a)}.$$

După simplificarea cu $\sin x$, E devine succesiv :

$$E=\frac{2\cos^2 x+\cos(x-a)\cos(x+a)}{\sin(x-a)\sin(x+a)}=$$

$$=\frac{\frac{2\cos^2 x+\cos(x-a+x+a)+\cos(x-a-x-a)}{2}}{\frac{\cos(x+a-x+a)-\cos(x-a+x+a)}{2}}=$$

$$=\frac{4\cos^2 x+\cos 2x+\cos 2a}{\cos 2a-\cos 2x}=\frac{\cos 2a+\cos 2x+4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}{\cos 2a-\cos 2x}=$$

$$=\frac{\cos 2a+3\cos 2x+2}{\cos 2a-\cos 2x},$$ ceea ce trebuia dovedit.

Pentru a obține condiția ca E să nu depindă de x, punem expresia sub forma :

$$E=\frac{3\cos 2x+(\cos 2a+2)}{-\cos 2x+\cos 2a}.$$

Condiția de independență față de x este dată de relația :

$$\frac{3}{-1} = \frac{\cos 2a + 2}{\cos 2a},$$

sau : $\cos 2a = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$.

Rezultă :

$$a = k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

unde k este un întreg oarecare.

482. a) Notăm unghiul $AOB = 45° + x$, atunci $\widehat{COD} = 45° - x$ (fig. 217), iar $\overline{AB} = 2\sqrt{2}\sin\frac{45°+x}{2}$; $\overline{CD} = 2\sqrt{2}\sin\frac{45°-x}{2}$ și $\overline{BC} = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$.

Rezultă :

$$2\sqrt{2}\left(\sin\frac{45°+x}{2} + \sin\frac{45°-x}{2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1,$$

sau : $4\sqrt{2}\sin\frac{45°}{2}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1.$

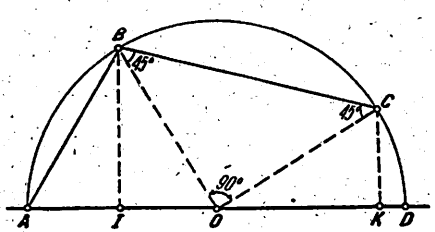


Fig. 217.

Calculăm :

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

și apoi :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Deducem : $2x = 30°$ și deci $x = 15°$, iar $\widehat{AOB} = 45° + x = 60°$

și : $\widehat{COD} = 45° - x = 30°$.

Avem deci:

$$\overline{AB} = 2\sqrt{2}\sin\frac{45°-x}{2} = 2\sqrt{2}\ \sin 30° = \sqrt{2},$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{2}\sin\frac{90°}{2} = 2 \text{ şi } \overline{CD} = 2\sqrt{2}\sin\frac{45°-x}{2} = 2\sqrt{2}\sin 15° =$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1.$$

b) Aria corpului născut prin rotirea patrulaterului $ABCD$ în jurul laturei $\overline{AD}$ este:

$S = \pi.\ \overline{BI}.\ \overline{AB} + \pi.\ \overline{BC}(\overline{BI} + \overline{CK}) + \pi.\ \overline{CK}.\ \overline{CD}$ (unde I şi K sînt proiecţiile punctelor B şi C pe AD).

Urmează că:

$$S = \pi\left[\overline{AB}^2.\sin 60° + \overline{BC}\left(\overline{AB}\sin 60° + \overline{CD}\sin 75°\right) + \overline{CD}^2\sin 75°\right] =$$

$$= \pi\left[\sqrt{3} + \sqrt{6} + \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} + \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\,\pi.$$

c) Volumul corpului este:

$$V = \pi.\frac{\overline{BI}^2\cdot\overline{AI}}{3} + \frac{\pi\cdot\overline{IK}}{3}\cdot\left(\overline{BI}^2 + \overline{BI}\cdot\overline{CK} + \overline{CK}^2\right) + \frac{\pi\cdot\overline{CK}^2\cdot\overline{KD}}{3}$$

sau: $\frac{3V}{\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

Rezultă:

$$V = \frac{(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\pi}{3}.$$

483. Notăm $\overline{BC} = a$; $\overline{AC} = b$ și $\overline{AB} = c$ (fig. 218). Să calculăm laturile triunghiului $A'B'C'$.

Considerăm $\overline{B'C'}$ ca latură a triunghiului $AB'C'$ în care cunoaștem $\overline{AB'} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, $\overline{AC'} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ și $\widehat{C'AB'} = 60° + A$.

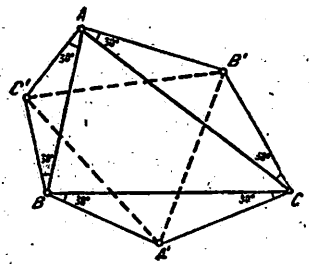


Fig. 218.

Avem:

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB'}^2 - 2\overline{AC'} \cdot \overline{AB'} \cos(60° + A),$$

sau: $\overline{B'C'}^2 = \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{2bc}{3}(\cos 60° - \cos A - \sin 60° \sin A)$.

Având în vedere: $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ și $\sin A = \frac{a}{2R}$, (R raza cercului circumscris triunghiului ABC), deducem:

$$\overline{B'C'}^2 = \frac{b^2+c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc} - \frac{a\sqrt{3}}{4R}\right)$$

și apoi:

$$\overline{B'C'}^2 = \frac{1}{6R}[R(a^2 + b^2 + c^2) + abc\sqrt{3}]. \qquad (1)$$

Formula (1) fiind simetrică în raport cu a; b; c, rezultă că $\overline{A'B'}^2$ și $\overline{A'C'}^2$ au aceeași valoare cu $\overline{B'C'}^2$, ceea ce înseamnă că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

484. Ridicăm la pătrat egalitățile și adunăm membru cu membru, obținem:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Prin această operație nu s-au introdus rădăcini străine celor căutate, dat fiind că x și y sînt presupuse unghiuri ascuțite.

Ecuația (1) se mai scrie astfel:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{4}, \qquad (2)$$

sau:

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

De unde rezultă $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$ și apoi $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (3)

(am luat numai semnul $+\frac{1}{2}$ pentru că unghiul x fiind ascuțit, $\sin x$ și $\cos x$ sînt pozitive).

Din (3) deducem $\sin 2x = 1$ și prin urmare $x = 45°$.

Înlocuim valoarea găsită în prima din ecuațiile date.

Avem $\frac{1}{2}\sin y = \sin^3 45° = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

și deci $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă $y = 45°$.

Așadar soluția cerută este:

$$x = 45°;\ y = 45°.$$

485. Considerăm o secțiune plană prin axa conului și a cilindrului înscris cu aria totală maximă (fig. 219).

Notăm raza cilindrului cu x. Din asemănarea triunghiurilor AIE și AOC, avem:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AO}\,(=12)} = \frac{\overline{IE}\,(=x)}{\overline{OC}\,(=4)},$$

de unde rezultă:

$$\overline{AI} = \frac{12x}{4} = 3x.$$

Urmează că înălțimea cilindrului este egală cu:

$$i = \overline{AO} - \overline{AI} = 12 - 3x = 3(4 - x).$$

Aria totală a cilindrului înscris are valoarea:

$$S = 2\pi x(x + 12 - 3x) = 4\pi x(6 - x).$$

Această arie este maximă atunci cînd şi expresia :

$$y = x(6 - x) = 6x - x^2 = 9 - (x - 3)^2$$

e maximă, ceea ce se întîmplă cînd scădem din 9 cea mai mică valoare posibilă adică zero. Rezultă de aci că y este maxim cînd $(x-3)^2 = 0$, sau $x = 3$. Înălţimea cilindrului devine în acest caz $i = 3(4-x) = 3$.

Aşadar, dimensiunile cilindrului înscris cu aria totală maximă sînt : $r = 3$ şi $i = 3$, iar aria maximă este :

$$S = 36.$$

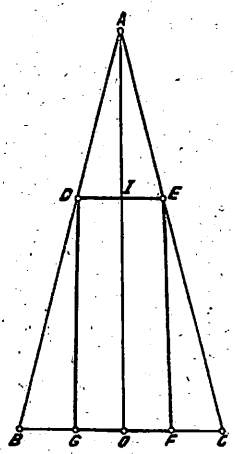


Fig. 219

486. Înlocuim $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, după care expresia devine :

$$y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1.$$

Punînd în evidenţă pătratul unui binom în $\sin x$, obţinem :

$$y = -\frac{3}{2} + 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Cea mai mică valoarea a lui y o obţinem atunci cînd $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ adică pentru $x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ sau $x_2 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$, iar valoarea minimă a lui y este :

$$y_{\min} = -\frac{3}{2}.$$

Valoarea maximă a lui y are loc atunci cînd şi $\sin x + \frac{1}{2}$ este maxim. Aceasta se întîmplă cînd $\sin x = 1$, adică pentru valorile $x = \frac{(4k+1)\pi}{2}$. Maximumul funcţiei y este :

$$y_{\max} = -\frac{3}{2} + 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

487. Înmulțim și împărțim expresia din membrul stîng cu :

$$2 \sin \frac{x}{2}.$$

Avem astfel :

$$E = \frac{2 \sin x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \ldots + 2 \sin nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Înlocuim produsele $2 \sin a \sin b$ cu expresia echivalentă $\cos (a - b) - \cos (a + b)$, după care E devine :

$$E = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \ldots + \cos \frac{(2n-1)x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

sau, după efectuarea reducerilor de la numărător, obținem :

$$E = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

De unde rezultă :

$$E = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

ceea ce trebuia dovedit.

488. Din relația dată decurge :

$$(y - 2x)\pi = k\pi, \qquad (1)$$

unde k este un număr întreg pozitiv sau negativ.

Ecuația (1) reprezintă dreptele :

$$y = 2x + k$$

paralele cu $y = 2x$ și care determină tăieturile $-\frac{k}{2}$ pe Ox și k pe Oy. De la o dreaptă la cea următoare se trece mărind sau micșorînd tăietura de pe Oy cu 1.

Locul geometric căutat este format de o rețea de drepte paralele care se construiesc după observațiile de mai sus și ele sînt reprezentate în figura 220.

489. Pentru x negativ y este egal cu $-\frac{6}{|x|}$, pentru x pozitiv numitorul este nul, funcția y nu are sens.

Funcția y poate fi reprezentată grafic numai pentru valorile lui x care variază de la $-\infty$ la 0.

Introducem într-un tabel cîteva valori ale lui x și cele corespunzătoare pentru y pentru a obține cîteva puncte ale curbei.

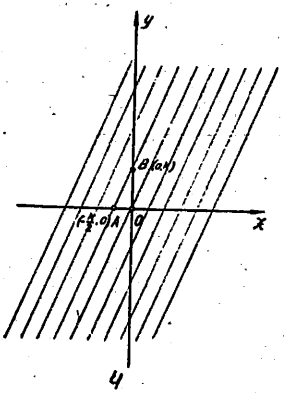


Fig. 220

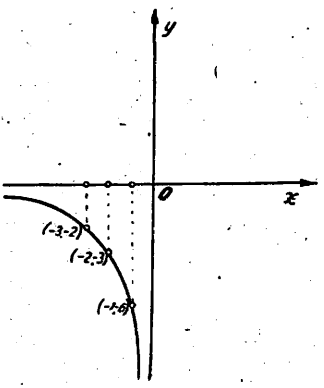


Fig. 221

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0
y	0 descreşte	-2 descreşte	-3 descreşte	-6 descreşte	$-\infty$

Graficul funcției este cel din figura 221.

490. Scriem ecuaţia sub forma :

$$\frac{1-\cos 2(x+a)}{2} = \frac{\cos(x+2b-x-2c)-\cos(x+2b+x+2c)}{2},$$

sau : $\cos 2(x+a) - \cos 2(x+b+c) = 1 - \cos 2(b-c)$.

Transformînd diferenţa de cosinusuri în produs, ecuaţia devine :

$$2\sin\frac{2(x+b+c)-2(x+a)}{2}\sin\frac{2(x+b+c)+2(x+a)}{2} = 2\sin^2(b-c)$$

sau : $\sin(b+c-a)\sin(2x+a+b+c) = \sin^2(b-c)$ (1).

Rezultă :

$$x = \frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\sin^2(b-c)}{\sin(b+c-a)} - a - b - c\right].$$

Aplicaţia numerică : $a = -50°$; $b = 65°$, $c = 35°$.

Înlocuim aceste valori în ecuaţia (1), obţinem :
$\sin(65°+35°+50°)\sin(2x-50°+65°+35°) = \sin^2(65°-35°)$
sau : $\sin 150°\sin(2x+35°) = \sin^2 30°$.

Rezultă :

$$\sin(2x+35°) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \sin 30°$$

care dă :

$$x_1 = k.180° - 2°30',$$

şi :

$$x_2 = k.180° + 57°30'.$$

Soluţiile cuprinse între 0° şi 720° sînt : 57°30' ; 177°30' ; 237°30' ; 357°30' ; 417°30' ; 537°30' ; 597°30' ; 717°30'.

491. Fie A şi B respectiv volumul cilindrului şi conului. Avem : $A = \pi R^2 I = \pi 25.30 = 750\pi$ cm³ ;

$$B = 250\,\pi \text{ cm}^3.$$

a) Pentru $x_1 = 5$, avem $v_1 = \pi R^2 x_1 = 125\pi < B$.

Pentru a afla înălțimea y_1 a conului plin cu apă, aplicăm proprietatea că raportul volumelor a două corpuri asemenea este același cu raportul cuburilor a două lungimi omoloage. Astfel avem:

$$\frac{125\pi}{250\pi} = \frac{y_1^3}{30^3}, \text{ de unde } y_1 = 15\sqrt[3]{4} \approx 23{,}8 \text{ cm}.$$

Fie $x_2 = 20$ cm; avem $v_2 = \pi 25 \cdot 20 = 500\pi > B$.
Putem scrie:

$$500\pi = 250\pi + 25\pi(y_2 - 30), \text{ de unde}$$
$$y_2 = 40 \text{ cm}.$$

Fie: $x_3 = 50$ cm; avem deci: 10 cm de la vîrful conului gol.

Volumul golului V_g este dat de relația:

$$\frac{V_g}{250\pi} = \frac{10^3}{30^3} = \frac{1}{27}; \text{ de unde } V_g = \frac{250\pi}{27}.$$

Mai avem: $V_g = \pi R^2(60 - y_3) = 25\pi(60 - y_3)$.
Deci, egalînd valorile lui V_g, avem:

$$\frac{250\pi}{27} = 25\pi(60 - y_3),$$

sau:
$$y_3 = 60 - \frac{10}{27} \approx 59{,}6 \text{cm}.$$

b) Observăm că relațiile între x și y se schimbă cînd $x = 10$ cm și $x = 30$ cm.

Pentru $0 \leqslant x \leqslant 10$ cm, avem: $\frac{250\pi}{30^3} = \frac{25\pi x}{y^3}$ sau: $y = 3\sqrt[3]{100x}$.

Pentru $10 \leqslant x \leqslant 30$, avem:

$$25\pi \cdot x = 250\pi + 25\pi(y - 30), \text{ sau } y = x + 20.$$

Pentru $30 \leqslant x \leqslant 60$, observăm că este o corespondență cu primul caz, cînd $0 \leqslant x \leqslant 30$, unde am avut $y = 3\sqrt[3]{100x}$;

însă acum y devine $60 - x$ și x devine $60 - y$, adică avem: $60 - x = 3\sqrt[3]{100\,(60 - y)}$, sau:

$$y = 60 - \frac{(60 - x)^3}{2\,700}.$$

Dacă notăm $y - 60 = Y$ și $x - 60 = X$, avem:

$$2\,700\,Y = X^3.$$

c) Pentru reprezentarea grafică se observă că y este funcția crescătoare o dată cu x și continuă în fiecare interval studiat. În primul și al treilea interval curbele sînt cubice; iar în intervalul al doilea, curba este o linie dreaptă.

Pentru întocmirea tabloului de variație, calculăm valorile lui y pentru valorile următoare ale lui x, și avem:

$x = 0$, $y = 0$; $x = 10$, $y = 30$;

$x = 30$, $y = 50$; $x = 40$, $y = 60 - \frac{(60 - 40)^3}{2\,700} = 57{,}04$;

$x = 50$, $y = 59{,}63$; $x = 60$, $y = 60$.

În rezumat, avem tabloul:

x	0	5	10	20	30	40	50	60
y	0	23,8	30	40	50	57,04	59,63	60
V	0	$125\,\pi$	$250\,\pi$	$500\,\pi$	$750\,\pi$	$\frac{8\,000\,\pi}{9}$	$\frac{8\,875\,\pi}{9}$	$1000\,\pi$

Observăm că fiind același vas care se răstoarnă, față de punctul unde vasul este jumătate plin, adică în reprezentarea grafică punctul S, curba este simetrică față de perpendiculara în punctul S, pe mijlocul segmentului de dreaptă MN.

d) Despărțim aria în trei arii corespunzătoare celor trei intervale și aplicăm formula:

$$S = \int_a^b y\,dx$$

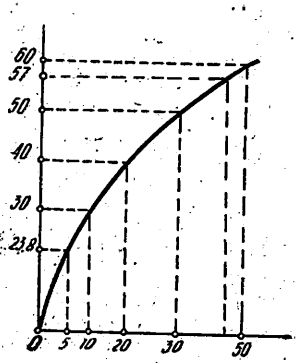


Fig. 222

$$S_1 = \int_0^{10} 3\sqrt[3]{100}\, x\,dx = 3\left[\sqrt[3]{100}\,\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{4}{3}}\right]_0^{10} = \frac{9}{4}\sqrt[3]{10^6} = 225\ \text{cm}^2.$$

$$S_2 = \int_{10}^{30}(x+20)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 20x\right]_{10}^{30} = +450 + 600 -$$
$$- 50 - 200 = 800\ \text{cm}^2.$$

$$S_3 = \int_{30}^{60}\left[60 - \frac{(60-x)^3}{2\,700}\right]dx = \left[60x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\,700}(60-x)^4\right]_{30}^{60} =$$
$$= 1\,725\ \text{cm}^2.$$

Deci avem :

$$S = 225 + 800 + 1\,725 = 2\,750\ \text{cm}^2.$$

492. Avem funcția : $y = \sqrt[3]{x}$. Pentru o creștere h oricît de mică a lui x corespunde o creștere k a lui y destul de mică.

$y' = \lim_{h\to 0}\frac{k}{h}$. Avem : $\frac{k}{h} = \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$.

Folosind identitatea :

$$a^3 - b^3 = (a-b)\quad (a^2 + ab + b^2)$$ și avem :

$$\frac{k}{h} = \frac{\left(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}\right)\left[\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}\right]}{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}\right]}$$ sau :

$$\frac{k}{h} = \frac{x+h-x}{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}},$$

trecînd la limită obținem : $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

493. 1) Dacă notăm cu x și y catetele, avem sistemul:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

$$x + y = a + 2r,$$

care este echivalent cu sistemul:

$$\begin{aligned} x + y &= a + 2r, \\ xy &= 2r\,(a + r). \end{aligned} \tag{1}$$

Catetele sînt date de rădăcinile ecuației de gradul al doilea:

$$z^2 - (a + 2r)\,z + 2r\,(a + r) = 0$$

al cărei discriminant este:

$$\Delta = a^2 - 4ar - 4r^2.$$

Pentru ca rădăcinile ecuației z să fie reale, trebuie să avem $\Delta \geqslant 0$ ceea ce implică ca $a \leqslant 2r\,(1 - \sqrt{2})$ sau $a \geqslant 2r\,(1 + \sqrt{2})$. Pentru că a nu este negativ, urmează că problema este posibilă numai dacă avem:

$$a \geqslant 2r\,(1 + \sqrt{2}) \approx 4{,}82\,r.$$

2) Din sistemul (1) rezultă și construcția geometrică, fiind vorba de a găsi două segmente a căror sumă și produs se cunosc. Construcția este următoarea:

Pe segmentul $\overline{AD}$ format din $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = r$ și $\overline{CD} = r$, ca diametru descriem un semicerc (fig. 223). De asemeni pe segmentul CF format din $\overline{CB} = r$, $\overline{BA} = a$, $\overline{AE} = r$, $\overline{EF} = r$, descriem tot un semicerc. Perpendiculara ridicată în A pe AB, taie al doilea semicerc în punctul P, iar paralela din P la AB taie primul semicerc în M și N. Segmentele $\overline{PM}$ și $\overline{PN}$ sînt catetele triunghiului căutat.

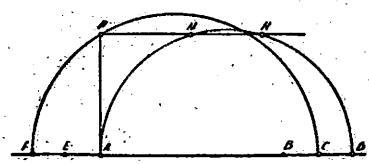


Fig. 223

Problema este posibilă numai dacă $\overline{AP} \leqslant \frac{\overline{AD}}{2}$, adică atunci cînd:

$$\sqrt{2r(a+r)} \leqslant \frac{a+2r}{2},$$

care ne conduce ca mai sus la:

$$a \geqslant 2r(1+\sqrt{2}).$$

3) Avem:

$$x+y = a(\sin B + \sin C) = 2a \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = a+2r,$$

sau:

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{a+2r}{a\sqrt{2}}.$$

Aceasta este relaţia dintre unghiuri şi datele problemei. Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca $\frac{a+2r}{a\sqrt{2}} \leqslant 1$, care ne conduce la $a \geqslant 2r(\sqrt{2}+1)$. Aceeaşi condiţie a fost obţinută la punctele 1) şi 2).

494. 1) Pătratul diagonalei are expresia $d^2 = a^4 + b^4 + (a+b)^4$, iar aria totală:

$$A = 2a^2b^2 + 2a^2(a+b)^2 + 2b^2(a+b)^2 = 2a^2b^2 + 2(a+b)^2(a^2+b^2).$$

Putem scrie:

$$d^2 = 2a^2b^2 + (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (a+b)^4 =$$
$$= 2a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 + (a+b)^4 = 2a^2b^2 + (a-b)^2(a+b)^2 +$$
$$+ (a+b)^4 = 2a^2b^2 + (a+b)^2[(a-b)^2 + (a+b)^2] =$$
$$2a^2b^2 + 2(a+b)^2(a^2+b^2),$$

ceea ce dovedeşte afirmaţia de sub 1).

2) Avem $\frac{d^2}{a^2+b^2+(a+b)^2} = \frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{a^2+b^2+(a+b)^2} =$

$$= \frac{[a^2+b^2+(a+b)^2]^2 - 2a^2b^2 - 2a^2(a+b)^2 - 2b^2(a+b)^2}{a^2+b^2+(a+b)^2} =$$

$$= a^2 + b^2 + (a+b)^2 - \frac{2a^2b^2+2(a+b)^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+(a+b)^2}.$$

Ținînd seama de rezultatul de sub (1), reiese :

$$\frac{d^2}{a^2+b^2+(a+b)^2} = a^2 + b^2 + (a+b)^2 - \frac{d^2}{a^2+b^2+(a+b)^2}$$

și prin urmare :

$$\frac{d^2}{a^2+b^2+(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{2} = a^2 + ab + b^2,$$

ceea ce dovedește justețea afirmației de sub 2).

3) Să presupunem paralelipipedul dat $ABCA'B'C'D'$ și o diagonală AC' (fig. 224). Considerăm $a < b$ și muchiile $\overline{AD} = a^2$; $\overline{AB} = b^2$; $\overline{AA'} = (a+b)^2$, iar unghiurile acestor muchii cu AC' sînt notate respectiv cu α; β; γ.

Avem :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{DC'}}{\overline{AD}}\ ;\ \operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{BC'}}{\overline{AB}}\ ;\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AA'}},$$

sau :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{b^4+(a+b)^4}}{a^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \left(1+\frac{b}{a}\right)^4};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{a^4+(a+b)^4}}{b^2} = \frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{b}{a}\right)^4}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2};$$

$$\text{și } \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{a^4+b^4}}{(a+b)^2} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^4}}.$$

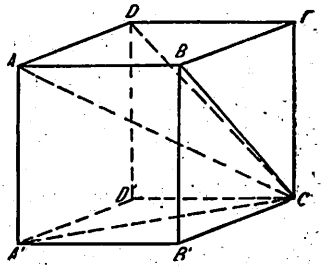


Fig. 224

Avînd în vedere că a^2, b^2 și $(a+b)^2$ sînt în progresie aritmetică rezultă:

$$b^2 - a^2 = (a+b)^2 - b^2$$

sau:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right) - 2 = 0,$$

care ne dă valoarea acceptabilă:

$$\frac{b}{a} = 1 + \sqrt{3}.$$

Urmează deci că:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{(1+\sqrt{3})^4 + (2+\sqrt{3})^4} = \sqrt{125 + 72\sqrt{3}} \approx 15{,}8,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{98 + 56\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} \approx 5{,}1,$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{29 + 16\sqrt{3}}}{7 + 4\sqrt{3}} \approx 0{,}5.$$

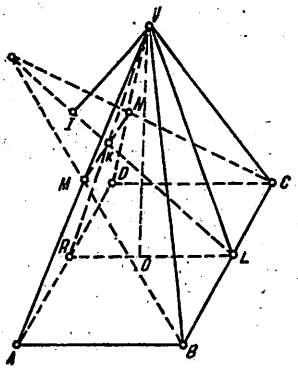


Fig.225

495. 1) Secțiunea $BCMN$ (fig. 225) este un trapez isoscel (fig. 226) cu baza mare $\overline{BC} = a$, baza mică $\overline{MN} = \frac{a}{2}$ iar înălțimea $\overline{KL}$ este mediana triun-

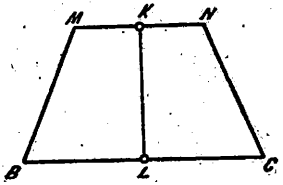


Fig.226

ghiului isoscel ce se formează prin ducerea prin V a planului perpendicular pe bază (fig. 225).

2) Distanța VI la planul $BCMN$ este segmentul $\overline{VI}$ perpendicular pe mediana KL a triunghiului isoscel VRL (fig. 227), despre care am vorbit mai sus. Pentru a calcula $\overline{VI}$ avem nevoie de $\overline{KL}$. În acest scop determinăm $\overline{VL} = \overline{VR}$:

$$\overline{VL}^2 = \overline{VO}^2 + \overline{OL}^2 = i^2 + \frac{a^2}{4},$$

de unde rezultă: $\overline{VL} = \overline{VR} = \frac{\sqrt{a^2 + 4i^2}}{2}$.

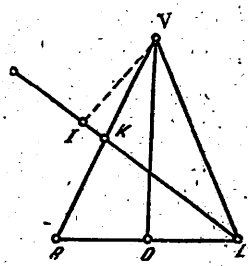


Fig. 227

Aplicînd formula medianei într-un triunghi găsim:

$$\overline{KL}^2 = \frac{2(\overline{VL}^2 + \overline{RL}^2) - \overline{VR}^2}{4}.$$

sau $KL = \frac{\sqrt{4i^2 + 9a^2}}{4}$.

Pentru a calcula $\overline{VI}$ exprimăm aria VKL care este jumătate din aria VRL, avem:

$$\frac{\overline{VI} \cdot \overline{KL}}{2} = \frac{\text{aria}\,(VRL)}{2};$$

urmează deci $\overline{VI} = \frac{\text{aria}\,(VRL)}{\overline{KL}} = \frac{\frac{ai}{2}}{\frac{\sqrt{4i^2 + 9a^2}}{4}} = \frac{2ai}{\sqrt{4i^2 + 9a^2}}$.

3) Volumul piramidei $VMNCB$ este dat de formula:

$$v = \frac{\text{aria}\,(MNCB) \cdot \overline{VI}}{3} = \frac{\frac{\overline{MN} + \overline{BC}}{2} \cdot \overline{KL} \cdot \overline{VI}}{3} = \frac{a \cdot \overline{KL} \cdot \overline{VI}}{4} =$$

$$= \frac{a \cdot 2\,\text{aria}\,(VKL)}{4} = \frac{a \cdot \text{aria}\,VAL}{4} = \frac{a \cdot ai}{8} = \frac{a^2 i}{8},$$

iar acela al piramidei $VABCD$ este:

$$V = \frac{\text{aria } (ABCD) \cdot \overline{VO}}{3} = \frac{a^2 \cdot i}{3}.$$

Raportul volumelor este deci:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{a^2 i}{8}}{\frac{a^2 i}{3}} = \frac{3}{8}.$$

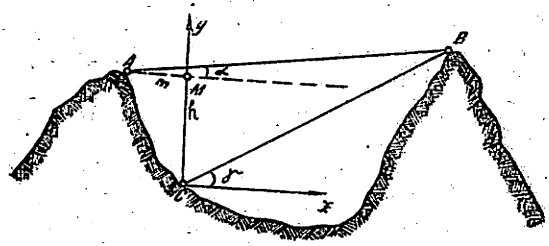


Fig. 228

496. Considerăm orizontala din C ca axă Ox şi verticala CM ca axă Oy (fig. 228) şi proiectăm conturul $AMCBA$ pe cele două axe, avem:

$$\text{pr } \overline{AB} = \text{pr } AM + \text{pr } MC + \text{pr } CB$$

pe Ox: $\quad \overline{AB} \cos \alpha = m + CB \cos \gamma$

pe Oy: $\quad \overline{AB} \sin \alpha = -h + \overline{CB} \sin \gamma$

Acest sistem de două ecuaţii cu două necunoscute $\overline{AB}$ şi $\overline{CB}$ ne dă:

$$\overline{AB} = \frac{-m \sin \gamma - h \cos \gamma}{\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \alpha} = \frac{m \sin \gamma + h \cos \gamma}{\sin (\gamma - \alpha)}.$$

Dacă punem $\frac{h}{m} = \text{tg } \varphi$, atunci:

$$\overline{AB} = \frac{m \sin (\varphi + \gamma)}{\cos \varphi \sin (\gamma - \alpha)},$$

care este formulă calculabilă prin logaritmi.

CUPRINS

	Pag.
Cuvînt înainte	5
Partea I — Aritmetică	7
Partea a II-a — Geometrie	30
Partea a III-a — Algebră	54
Partea a IV-a — Probleme diverse şi trigonometrie	78

RĂSPUNSURI

Partea I — Aritmetică	99
Partea a II-a — Geometrie	151
Partea a III-a — Algebră	245
Partea a IV-a — Probleme diverse şi trigonometrie	323

Nr. 2055

Redactor de carte: Bălțărețu I.
Tehnoredactor: V. Postelnicu

Dat la cules 8.V.1959. Bun de tipar 20.VI.1959. Tiraj 8150 ex. Hîrtie semivelină de 65 g. m² Ft. 16/61 × 86. Coli de tipar 25,25 Coli de editură 19,1. Com. editurii 3,160. Ed. I A. 01887. Pentru bibliotecile mici indicele de clasificare 51 (R).

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică nr. 3, Bdul. 6 martie nr. 29 București — R.P.R.